MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

Analiza matematyczna 1

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie jedenaste



MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Semestr pierwszy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Laboratorium komputerowe

Semestr drugi

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania

Teresa Jurlewicz, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Laboratorium komputerowe



www.gis.wroc.pl

GiS

ANALIZA
MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie jedenaste zmienione



Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 2001

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Printed in Poland.

Skład skryptu wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 83–85941–82–7

Wydanie XI zmienione, Wrocław 2001
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp. z o.o.

Spis treści

Wstęp

Podręcznik *„Analiza matematyczna 1. Defnicje, twierdzenia, wzory"* jest pierwszą częścią zestawu książek do **Analizy matematycznej 1**. Pozostałymi częściami tego zestawu są *„Przykłady i zadania"* oraz *„Kolokwia i egzaminy"*. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci akademii ekonomicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Opracowanie zawiera definicje, twierdzenia i wzory z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej wraz z ich zastosowaniami. Podręcznik został opracowany w ten sposób, aby mógł służyć jako konspekt wykładu. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe zadania są z reguły najprostsze. Do większości twierdzeń podano dowody (twierdzenia te oznaczone są symbolem ■). Dowody twierdzeń oraz odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń umieszczono na końcu poszczególnych rozdziałów. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości z analizy matematycznej.

W początkowym rozdziale podręcznika przedstawiono materiał dotyczący zbiorów i funkcji liczbowych. Ustalono tam także stosowane oznaczenia. Zalecamy zapoznanie się z tymi zagadnieniami przed rozpoczęciem zajęć. Wskazane jest także opanowanie materiału zawartego w dodatku do podręcznika *„Algebra liniowa 1. Defnicje, twierdzenia, wzory"*. Podajemy tam podstawowe wiadomości z logiki i teorii mnogości. Powyższy materiał będzie wielokrotnie wykorzystywany na wykładach i ćwiczeniach z analizy matematycznej.

Równolegle do materiału omawianego na wykładzie studenci powinni przerabiać listę zadań. Aby to ułatwić listę tę podzielono na 14 części, które należy

zrealizować w kolejnych tygodniach semestru. Listę zadań oraz metody ich rozwiązywania można znaleźć w drugiej części podręcznika. Lista ta, program kursu oraz zasady jego zaliczania są dostępne na stronach internetowych Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej pod adresem

`www.im.pwr.wroc.pl`

Ćwiczenia z tego podręcznika oraz zadania z listy zadań są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach, są umieszczone w trzeciej części podręcznika.

W jedenastym wydaniu książki rozszerzono zagadnienia teoretyczne, dodano dalsze ćwiczenia wraz z odpowiedziami oraz dołączono kolejne rysunki. Ponadto umieszczono dodatek zawierający tożsamości i nierówności wykorzystywane w analizie. Zawarte są w nim także informacje o symbolach sumy i iloczynu. Poprawiono również zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Pani dr Teresie Jurlewicz za trud włożony w przygotowanie odpowiedzi do ćwiczeń. Dziękujemy także Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach skryptu. Dziękujemy także Koleżankom i Kolegom z innych uczelni za komentarze dotyczące zakresu i sposobu ujęcia materiału. Uprzejmie prosimy wykładowców i studentów o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterkach.

Marian Gewert
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
gewert@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

0

ZBIORY I FUNKCJE LICZBOWE

0.1 Zbiór liczb rzeczywistych

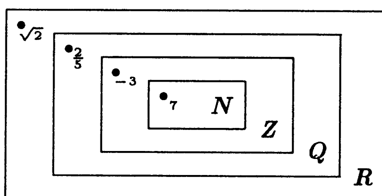
W podręczniku będziemy stosowali następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych,

$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}\right\}$ — zbiór liczb wymiernych,

$\boldsymbol{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.



Rys. 0.1.1. Relacje między zbiorami $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.

Oznaczenia tych zbiorów pochodzą od początkowych liter wyrazów w języku angielskim i niemieckim:

***N**atural,* ***Z**ahl,* ***Q**uotient,* ***R**eal.*

○ **Ćwiczenie 0.1.1**

Uzasadnić, że podane liczby są niewymierne:

a) $\sqrt{5}$; b) $\log_2 3$; c) $\cos\frac{\pi}{8}$; d) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; e*) $\operatorname{tg} 1^\circ$; f*) $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$.

○ **Ćwiczenie* 0.1.2**

Pokazać, że podane liczby są wymierne:

a) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

○ **Ćwiczenie 0.1.3**

Podać przykład liczb niewymiernych a, b takich, że liczby $a+b$, ab są wymierne.

○ **Ćwiczenie 0.1.4**

a) Udowodnić, że między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi leży liczba:
i) wymierna, ii) niewymierna;

b*) Udowodnić, że między dowolnymi dwiema liczbami niewymiernymi leży liczba:
i) wymierna, ii) niewymierna.

○ **Ćwiczenie* 0.1.5**

Zbadać, czy istnieją liczby a, b, c (wymierne, niewymierne) spełniające równość $a^b = c$. Rozważyć wszystkie przypadki.

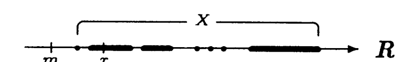
0.2 Zbiory ograniczone

● **Definicja 0.2.1** *(zbiór ograniczony z dołu)*

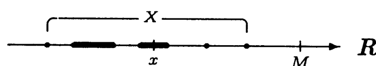
Zbiór $X \subset \boldsymbol{R}$ jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\bigvee_{m\in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x\in X} x \geqslant m.$$

Liczbę m nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru X. Obrazowo: zbiór jest ograniczony z dołu, gdy wszystkie jego elementy leżą na prawo od pewnego punktu osi liczbowej (rys. 0.2.1).



Rys. 0.2.1. Zbiór ograniczony z dołu.



Rys. 0.2.2. Zbiór ograniczony z góry.

● **Definicja 0.2.2** *(zbiór ograniczony z góry)*

Zbiór $X \subset \boldsymbol{R}$ jest ograniczony z góry, jeżeli

$$\bigvee_{M\in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x\in X} x \leqslant M.$$

Liczbę M nazywamy ograniczeniem z góry zbioru X. Obrazowo: zbiór jest ograniczony z góry, gdy wszystkie jego elementy leżą na lewo od pewnego punktu osi liczbowej (rys. 0.2.2).

○ **Ćwiczenie 0.2.3**

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu:

a) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$; b) $B = \{2^p : p \in \boldsymbol{Z}\}$; c) $C = (-\infty, 3)$; d) $D = [0, \infty) \setminus \boldsymbol{Q}$.

○ **Ćwiczenie 0.2.4**

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z góry:

a) $A = (-\infty, 0]$; b) $B = \{x \in \boldsymbol{R} : \sin x \geqslant 0\}$;

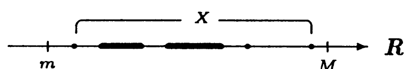
c) $C = \left\{ \sqrt[n]{5} : n \in \boldsymbol{N} \right\}$; d) $D = \left\{ \frac{1}{n} + n : n \in \boldsymbol{N} \right\}$.

● **Definicja 0.2.5** *(zbiór ograniczony)*

Zbiór $X \subset \boldsymbol{R}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z dołu i z góry, tzn.

$$\bigvee_{m,M \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leqslant x \leqslant M.$$

Obrazowo: zbiór jest ograniczony, gdy wszystkie jego elementy są położone między dwoma punktami osi liczbowej (rys. 0.2.3). Zbiór, który nie jest ograniczony, nazywamy nieograniczonym.



Rys. 0.2.3. Zbiór ograniczony.

Uwaga. W definicji można tak dobrać stałe m i M, aby $0 < M = -m$. Wtedy

$$\bigwedge_{x \in X} |x| \leqslant M.$$

○ **Ćwiczenie 0.2.6**

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone:

a) $A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \boldsymbol{N} \text{ oraz } p < q \right\}$; b) $B = \{x \in \boldsymbol{R} : \operatorname{tg} x = 7\}$;

c) $C = \left\{ x \in \boldsymbol{R} : x^2 + 3x - 8 < 0 \right\}$; d) $D = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n : n \in \boldsymbol{N} \right\}$.

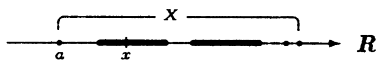
0.3 Kresy zbiorów

● **Definicja 0.3.1** *(element najmniejszy zbioru)*

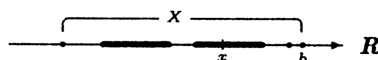
Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \boldsymbol{R}$, co zapisujemy $a = \min X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \in X \text{ oraz } \bigwedge_{x \in X} x \geqslant a.$$

Obrazowo: elementem najmniejszym zbioru nazywamy element tego zbioru leżący najbardziej w lewo na osi liczbowej (rys. 0.3.1).



Rys. 0.3.1. Element najmniejszy zbioru.



Rys. 0.3.2. Element największy zbioru.

Definicja 0.3.2 *(element największy zbioru)*
Liczba b jest największym elementem zbioru $X \subset \boldsymbol{R}$, co zapisujemy $b = \max X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b \in X \text{ oraz } \bigwedge_{x \in X} x \leqslant b.$$

Obrazowo: elementem największym zbioru nazywamy element tego zbioru leżący najbardziej w prawo na osi liczbowej (rys. 0.3.2).

Uwaga. Zbiór może nie mieć elementu najmniejszego ani największego. Takim zbiorem jest np. przedział $(0, 1)$.

Ćwiczenie 0.3.3
Zbadać, czy podane zbiory mają elementy najmniejsze:

a) $A = [0, 2)$; b) $B = \left\{\frac{1}{2n-1} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; c) $C = \left\{\sin\frac{\pi}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; d) $D = \boldsymbol{N}$.

Ćwiczenie 0.3.4
Zbadać, czy podane zbiory mają elementy największe:

a) $A = (0, 3) \cup \{5\}$; b) $B = \left\{\frac{4n}{n^2+1} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $C = \left\{\frac{2n}{n+1} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; d*) $D = \left\{\sqrt[n]{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$.

Ćwiczenie 0.3.5
Niech P oznacza zbiór:

a) długości przekątnych czworokątów wpisanych w okrąg o promieniu 1;

b*) wszystkich liczb pierwszych;

c*) najmniejszych kątów czworokątów wypukłych.

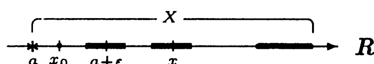
Czy w zbiorach P istnieją elementy najmniejsze i największe?

Definicja 0.3.6 *(kres dolny zbioru)*
Niech zbiór $X \subset \boldsymbol{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

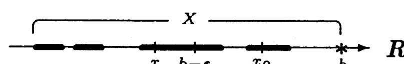
$$\bigwedge_{x \in X} x \geqslant a \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

Obrazowo: kres dolny zbioru jest największą liczbą ograniczającą ten zbiór z dołu (rys. 0.3.3). Jeżeli zbiór X nie jest ograniczony z dołu, to przyjmujemy

$$\inf X \overset{def}{=} -\infty.$$



Rys. 0.3.3. Kres dolny zbioru.



Rys. 0.3.4. Kres górny zbioru.

• **Definicja 0.3.7** *(kres górny zbioru)*

Niech zbiór $X \subset \boldsymbol{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in X} x \leqslant b \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Obrazowo: kres górny zbioru jest najmniejszą liczbą ograniczającą ten zbiór z góry (rys. 0.3.4). Jeżeli zbiór X nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy

$$\sup X \stackrel{def}{=} \infty.$$

Uwaga. Najmniejszy element zbioru jest jednocześnie jego kresem dolnym. Analogicznie, największy element zbioru jest jego kresem górnym.

○ **Ćwiczenie 0.3.8**

Znaleźć kresy dolne podanych zbiorów:

a) $A = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$; b) $B = \left\{2^{-n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $C = (-\infty, 0] \setminus \boldsymbol{Q}$; d) $D = \{-1\} \cup (0, 1]$.

○ **Ćwiczenie 0.3.9**

Znaleźć kresy górne podanych zbiorów:

a) $A = (-\infty, 0)$; b) $B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $C = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; d) $D = \left[\sqrt{2}, \infty\right) \cap \boldsymbol{Q}$.

○ **Ćwiczenie 0.3.10**

a) Niech L oznacza zbiór obwodów wielokątów wypukłych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Wyznaczyć $\inf L$ oraz $\sup L$.

b) Niech V oznacza zbiór ułamków dziesiętnych postaci $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ takich, że $c_n \neq 9$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. Wyznaczyć $\inf V$ oraz $\sup V$.

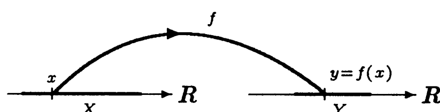
• **Fakt 0.3.11** *(aksjomat ciągłości)*

Każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.
Każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny.

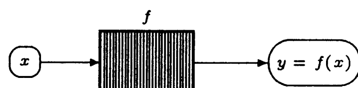
0.4 Funkcje – podstawowe określenia

• **Definicja 0.4.1** *(funkcja)*

Funkcją określoną na zbiorze $X \subset \boldsymbol{R}$ o wartościach w zbiorze $Y \subset \boldsymbol{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : X \longrightarrow Y$. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$ (rys. 0.4.1).



Rys. 0.4.1. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$.



Rys. 0.4.2. Funkcja jako „czarna skrzynka".

Funkcję można sobie wyobrazić jako „czarną skrzynkę", która przetwarza według ustalonej reguły liczby z jednego zbioru na liczby z drugiego zbioru (rys. 0.4.2).

○ **Ćwiczenie 0.4.2**

Podać przykłady funkcji określonych na wskazanych zbiorach X i przyjmujących wartości z podanych zbiorów Y :

a) $X = \boldsymbol{R}$, $Y = [-2, 2]$; b) $X = \boldsymbol{Z}$, $Y = \boldsymbol{N}$;

c) $X = (0, \infty)$, $Y = \boldsymbol{R}$; d) $X = \boldsymbol{N}$, $Y = \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$.

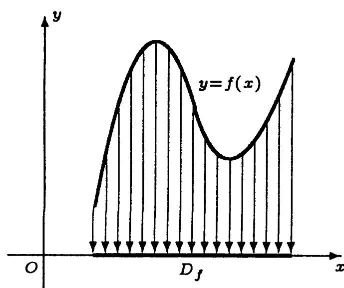
● **Definicja 0.4.3** *(dziedzina, przeciwdziedzina, zbiór wartości funkcji)*

Niech $f : X \longrightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy przez D_f, a zbiór Y nazywamy jej przeciwdziedziną. Ponadto zbiór

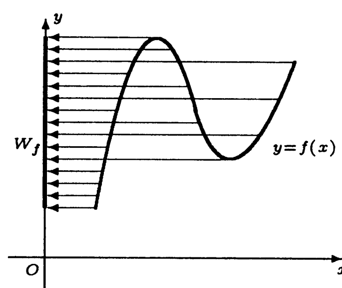
$$\{f(x) \in Y : x \in D_f\}$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji f i oznaczamy przez W_f. Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór tych elementów z $\boldsymbol{R}$, dla których wzór ten ma sens, nazywamy dziedziną naturalną funkcji.

Uwaga. Rzut prostokątny wykresu funkcji na oś Ox jest dziedziną tej funkcji (rys. 0.4.3). Zaś rzut prostokątny tego wykresu na oś Oy jest zbiorem jej wartości (rys. 0.4.4).



Rys. 0.4.3. Dziedzina funkcji.



Rys. 0.4.4. Zbiór wartości funkcji.

○ **Ćwiczenie 0.4.4**

Określić dziedziny naturalne oraz zbiory wartości podanych funkcji:

a) $f(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$; b) $g(x) = \operatorname{ctg} \pi x$; c) $h(x) = 1 + 2\sqrt[4]{\sin x}$;

d) $k(x) = 2^{-|x|}$; e) $l(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$; f) $m(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

○ **Ćwiczenie 0.4.5**

Podać przykłady funkcji, których dziedzinami naturalnymi są podane zbiory:

a) $(0,1)$; b) $[2,4]$; c*) $\mathbb{Z}$; d*) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; e*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; f*) $\{1\} \cup (2,3]$.

● **Definicja 0.4.6** *(równość funkcji)*

Funkcje $f : D_f \longrightarrow Y$, $g : D_g \longrightarrow Y$ są równe, co zapisujemy $f = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_f = D_g \text{ oraz } \bigwedge_{x \in D_f} f(x) = g(x).$$

○ **Ćwiczenie 0.4.7**

Zbadać, czy podane funkcje są równe:

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$; b) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$;

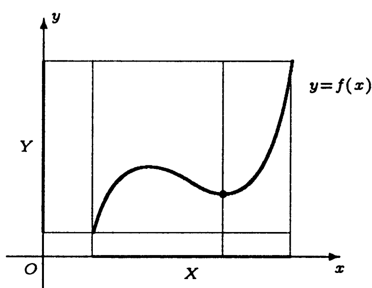
c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$; d) $f(x) = x$, $g(x) = \log_3 3^x$.

● **Definicja 0.4.8** *(wykres funkcji)*

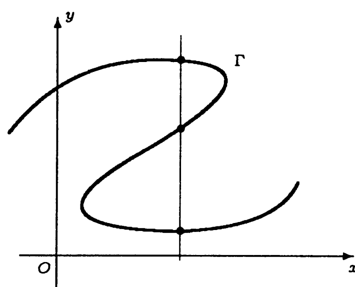
Wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Uwaga. Podzbiór płaszczyzny xOy jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x, gdy każda prosta pionowa przecina go co najwyżej w jednym punkcie (rys. 0.4.5-6).



Rys. 0.4.5. Wykres funkcji.



Rys. 0.4.6. Zbiór Γ nie jest wykresem funkcji.

○ **Ćwiczenie 0.4.9**

Naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych dziedzinach:

a) $f(n) = (-2)^n$, $\mathbb{N}$; b) $h(p) = \sin \frac{p\pi}{2}$, $\mathbb{Z}$;

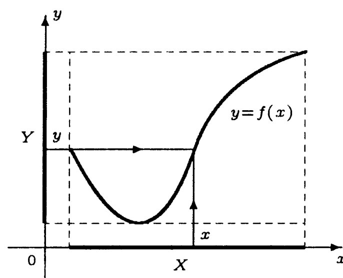
c) $k(x) = \log(|x| - 1)$, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; d) $g(x) = \sqrt{x}$, $[4, \infty)$.

• **Definicja 0.4.10** *(funkcja „na")*

Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, co notujemy $f : X \xrightarrow{na} Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$W_f = Y, \text{ tzn. } \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y.$$

Geometrycznie: funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest „na", gdy rzut prostokątny jej wykresu na oś Oy pokrywa się ze zbiorem Y (rys. 0.4.7).



Rys. 0.4.7. Wykres funkcji „na".

○ **Ćwiczenie 0.4.11**

Zbadać, czy podane funkcje $f : X \longrightarrow Y$ są „na":

a) $f(x) = \sin x$, $X = [0, 2\pi)$, $Y = [-1, 1]$;   b) $f(x) = x^2$, $X = \boldsymbol{R}$, $Y = (0, \infty)$;

c) $f(x) = 2^x$, $X = \boldsymbol{R}$, $Y = [0, \infty)$;   d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $X = (0, \infty)$, $Y = (2, \infty)$.

○ **Ćwiczenie* 0.4.12**

Podać przykład funkcji odwzorowującej przedział $(-1, 3)$ na przedział $[2, 5]$.

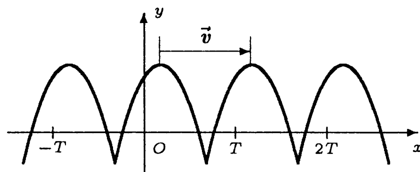
0.5 Funkcje okresowe, parzyste i nieparzyste

• **Definicja 0.5.1** *(funkcja okresowa)*

Funkcja $f : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ jest okresowa, jeżeli

$$\bigvee_{T>0} \bigwedge_{x \in X} \Big(x \pm T \in X \text{ oraz } f(x+T) = f(x) \Big).$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f, to nazywamy go okresem podstawowym.



Rys. 0.5.1. Funkcja okresowa.

Obrazowo: funkcja jest okresowa, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = (T, 0)$ nałoży się na siebie (rys. 0.5.1).

○ **Ćwiczenie 0.5.2**

Uzasadnić, że podane funkcje są okresowe oraz znaleźć ich okresy podstawowe:

a) $f(x) = \cos 3x$; b) $f(x) = |\sin 2x|$;

c) $g(k) = (-1)^k$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$; d) $h(x) = \sqrt[4]{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$.

○ **Ćwiczenie* 0.5.3**

Pokazać, że funkcja spełniająca dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ warunek

$$f(x+1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

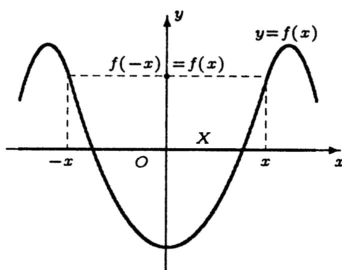
jest okresowa.

● **Definicja 0.5.4** *(funkcja parzysta)*

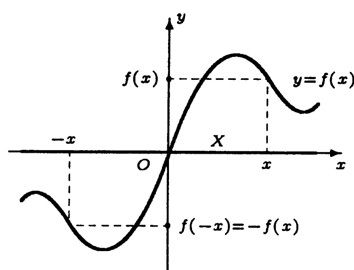
Funkcja $f : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ jest parzysta, jeżeli

$$\bigwedge_{x \in X} \Big(-x \in X \ \text{ oraz } \ f(-x) = f(x) \Big).$$

Obrazowo: funkcja jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu (rys. 0.5.2).



Rys. 0.5.2. Funkcja parzysta.



Rys. 0.5.3. Funkcja nieparzysta.

● **Definicja 0.5.5** *(funkcja nieparzysta)*

Funkcja $f : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ jest nieparzysta, jeżeli

$$\bigwedge_{x \in X} \Big(-x \in X \ \text{ oraz } \ f(-x) = -f(x) \Big).$$

Obrazowo: funkcja jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu (rys. 0.5.3).

○ **Ćwiczenie 0.5.6**
Uzasadnić, że podane funkcje są parzyste:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; b) $g(x) = 2^x + 2^{-x}$; c) $h(x) = |\sin x|$; d) $p(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}$.

○ **Ćwiczenie 0.5.7**
Uzasadnić, że podane funkcje są nieparzyste:

a) $f(x) = \dfrac{2+x^2}{x^5}$; b) $g(x) = \sin^3 x$; c) $h(x) = 3^x - 3^{-x}$; d) $p(x) = x|x|$.

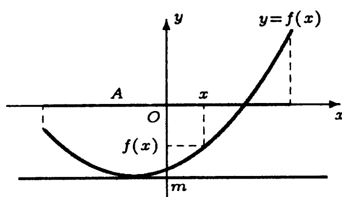
○ **Ćwiczenie* 0.5.8**
Pokazać, że każda funkcja, o symetrycznej względem początku układu dziedzinie, jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej. Uzasadnić, że przedstawienie to jest jednoznaczne.

0.6 Funkcje ograniczone

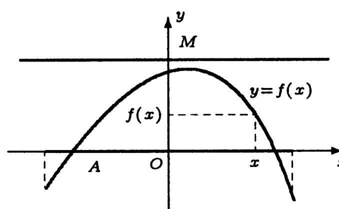
● **Definicja 0.6.1** *(funkcja ograniczona z dołu)*
Funkcja f jest ograniczona z dołu na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli zbiór jej wartości na tym zbiorze jest ograniczony z dołu, tzn.

$$\bigvee_{m \in R} \bigwedge_{x \in A} f(x) \geqslant m.$$

Obrazowo: funkcja jest ograniczona z dołu, gdy jej wykres leży nad pewną prostą poziomą (rys. 0.6.1).



Rys. 0.6.1. Funkcja ograniczona z dołu.



Rys. 0.6.2. Funkcja ograniczona z góry.

● **Definicja 0.6.2** *(funkcja ograniczona z góry)*
Funkcja f jest ograniczona z góry na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli zbiór jej wartości na tym zbiorze jest ograniczony z góry, tzn.

$$\bigvee_{M \in R} \bigwedge_{x \in A} f(x) \leqslant M.$$

Obrazowo: funkcja jest ograniczona z góry, gdy jej wykres leży pod pewną prostą poziomą (rys. 0.6.2).

○ **Ćwiczenie 0.6.3**

Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z dołu na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $\mathbf{R}$; b) $g(x) = \operatorname{tg} x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $h(x) = 2^x$, $(0, \infty)$; d) $p(x) = \log_{10} x$, $(0, \infty)$.

○ **Ćwiczenie 0.6.4**

Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z góry na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 1 - |x|$, $\mathbf{R}$; b) $g(x) = x^2$, $[2, \infty)$;

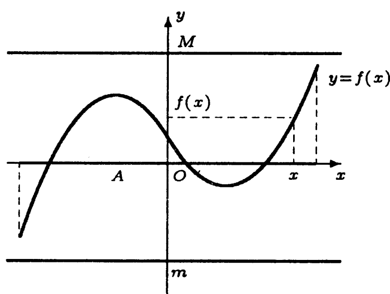
c) $h(x) = 2^x$, $(-\infty, 0]$; d) $p(x) = \frac{1}{|x|-1}$, $(-1, 1)$.

● **Definicja 0.6.5** *(funkcja ograniczona)*

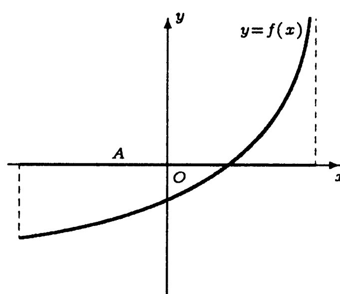
Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest ograniczona z dołu i z góry na tym zbiorze, tzn.

$$\bigvee_{m,M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in A} m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Obrazowo: funkcja jest ograniczona, gdy jej wykres jest położony między dwiema prostymi poziomymi (rys. 0.6.3). Funkcję, która nie jest ograniczona, nazywamy nieograniczoną (rys. 0.6.4).



Rys. 0.6.3. Funkcja ograniczona.



Rys. 0.6.4. Funkcja nieograniczona.

Uwaga. W definicji można tak dobrać stałe m i M, aby $0 < M = -m$. Wtedy

$$\bigwedge_{x \in A} |f(x)| \leqslant M.$$

○ **Ćwiczenie 0.6.6**

Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone na wskazanych zbiorach:

a) $g(x) = \frac{1}{x}$, $(1, 3]$; b) $h(x) = \log_2 x$, $(0, 1)$;

c) $p(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $\mathbf{R}$; d) $q(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, $[0, \infty)$.

○ **Ćwiczenie 0.6.7**

Pokazać, że suma oraz iloczyn funkcji ograniczonych są funkcjami ograniczonymi.

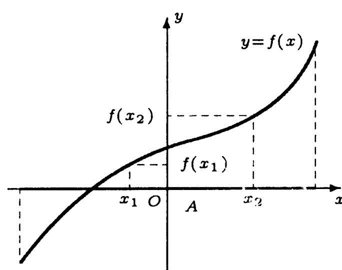
0.7 Funkcje monotoniczne

- **Definicja 0.7.1** *(funkcja rosnąca)*

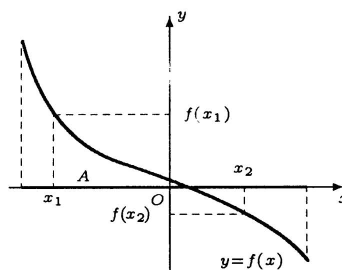
Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \Big[(x_1 < x_2) \Longrightarrow \big(f(x_1) < f(x_2) \big) \Big].$$

Obrazowo: funkcja jest rosnąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie wznosimy się do góry (rys. 0.7.1).



Rys. 0.7.1. Funkcja rosnąca.



Rys. 0.7.2. Funkcja malejąca.

- **Definicja 0.7.2** *(funkcja malejąca)*

Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \Big[(x_1 < x_2) \Longrightarrow \big(f(x_1) > f(x_2) \big) \Big].$$

Obrazowo: funkcja jest malejąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie opadamy na dół (rys. 0.7.2).

○ **Ćwiczenie 0.7.3**

Uzasadnić, że podane funkcje są rosnące na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = x^2$, $[0, \infty)$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$, $(-\infty, 0]$;

c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $\boldsymbol{R}$; d) $p(x) = \sqrt{x+1}$, $[-1, \infty)$.

○ **Ćwiczenie 0.7.4**

Uzasadnić, że podane funkcje są malejące na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 3 - 4x$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = x^2 - 2x$, $(-\infty, 1]$;

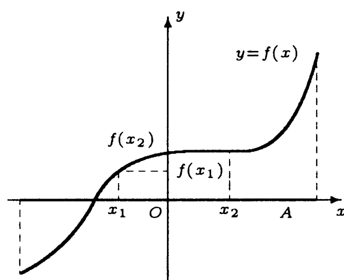
c) $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $[0, \infty)$; d) $p(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $(-\infty, -1)$.

- **Definicja 0.7.5** *(funkcja niemalejąca)*

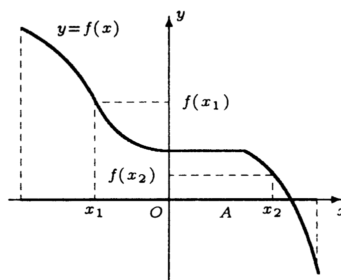
Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli:

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left[(x_1 < x_2) \Longrightarrow \Big(f(x_1) \leqslant f(x_2) \Big) \right].$$

Obrazowo: funkcja jest niemalejąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie wznosimy się lub pozostajemy na tym samym poziomie (rys. 0.7.3).



Rys. 0.7.3. Funkcja niemalejąca.



Rys. 0.7.4. Funkcja nierosnąca.

- **Definicja 0.7.6** *(funkcja nierosnąca)*

Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli:

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left[(x_1 < x_2) \Longrightarrow \Big(f(x_1) \geqslant f(x_2) \Big) \right].$$

Obrazowo: funkcja jest nierosnąca, gdy poruszając się w prawo po jej wykresie opadamy lub pozostajemy na tym samym poziomie (rys. 0.7.4).

○ **Ćwiczenie 0.7.7**

Uzasadnić, że podane funkcje są niemalejące na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) \equiv 2$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = x + |x|$, $\boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 0.7.8**

Uzasadnić, że podane funkcje są nierosnące na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = |x-1| - 2x$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x < 0, \\ -x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$ $\boldsymbol{R}$;

c) $h(x) = \max\{-x, 5\}$, $\boldsymbol{R}$; d) $p(x) = \sin \pi x$, $\boldsymbol{Z}$.

- **Definicja 0.7.9** *(funkcja monotoniczna)*

Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, jeżeli jest rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze. Przy czym funkcje rosnące i malejące nazywamy ściśle monotonicznymi, a funkcje nierosnące i niemalejące słabo monotonicznymi.

Uwaga. Rodzaj monotoniczności funkcji f na zbiorze A ustalamy badając znak ilorazu

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dla $x_1, x_2 \in A$, przy czym $x_1 \neq x_2$. Korzystamy wtedy z tabeli:

Znak ilorazu	Rodzaj monotoniczności
> 0	funkcja rosnąca
< 0	funkcja malejąca
$\geqslant 0$	funkcja niemalejąca
$\leqslant 0$	funkcja nierosnąca

○ **Ćwiczenie 0.7.10**

Pokazać, że

a) suma funkcji monotonicznych jednego rodzaju jest funkcją monotoniczną tego samego rodzaju;

b) iloczyn nieujemnych funkcji monotonicznych jednego rodzaju jest funkcją monotoniczną tego samego rodzaju.

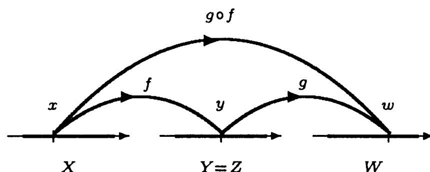
0.8 Złożenia funkcji

● **Definicja 0.8.1** *(funkcja złożona)*

Niech X, Y, Z, W będą podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, przy czym $Y \subset Z$ oraz niech $f : X \longrightarrow Y$, $g : Z \longrightarrow W$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \longrightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) \stackrel{def}{=} g\left(f(x)\right) \quad \text{dla } x \in X.$$

Uwaga. Analogicznie określa się złożenie większej liczby funkcji. Składanie funkcji nie jest przemienne.



Rys. 0.8.1. Złożenie funkcji.

○ **Ćwiczenie 0.8.2**

Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \cos x$;

c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

○ **Ćwiczenie 0.8.3**

Znaleźć funkcje f i g takie, że $h = g \circ f$, jeżeli:

a) $h(x) = \dfrac{2-|x|}{2+|x|}$; b) $h(x) = \sin^2 x$; c) $h(x) = \log\left(x^2+1\right)$; d) $h(x) = \sqrt{x+2}$.

● **Fakt 0.8.4** *(o składaniu funkcji monotonicznych)*

Złożenie funkcji:

1. ściśle monotonicznych jednego rodzaju jest funkcją rosnącą;
2. ściśle monotonicznych różnych rodzajów jest funkcją malejącą.

Uwaga. Prawdziwe są analogiczne fakty dla złożeń funkcji słabo monotonicznych.

○ **Ćwiczenie 0.8.5**

Korzystając z powyższego faktu uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \log\left(x^4+2\right)$, $[0,\infty)$; b) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $\left(\dfrac{2}{\pi},\infty\right)$; c) $f(x) = \dfrac{1}{3^{-x}+1}$, R.

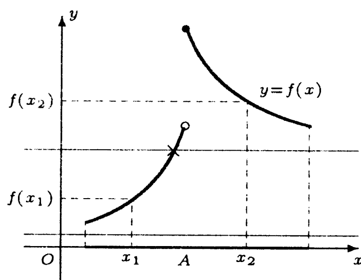
0.9 Funkcje odwrotne

● **Definicja 0.9.1** *(funkcja różnowartościowa)*

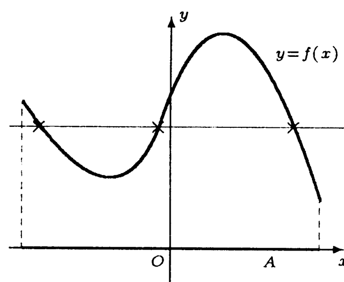
Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli:

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A}\left[(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow \Big(f(x_1) \neq f(x_2)\Big)\right].$$

Obrazowo: funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze A, gdy każda prosta pozioma przecina fragment wykresu leżący nad lub pod zbiorem A co najwyżej w jednym punkcie (rys. 0.9.1-2).



Rys. 0.9.1. Funkcja różnowartościowa.



Rys. 0.9.2. Funkcja nieróżnowartościowa.

Uwaga. Przy sprawdzaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z definicji równoważnej:

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A}\left[\Big(f(x_1) = f(x_2)\Big) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\right].$$

○ **Ćwiczenie 0.9.2**

Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

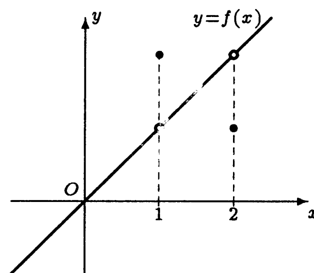
a) $f(x) = x^3 + 1$, $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$;

c) $h(x) = \sqrt{x} + 1$, $[0, \infty)$; d*) $p(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ -3^x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ $\mathbb{R}$.

● **Fakt 0.9.3** *(warunek wystarczający różnowartościowości funkcji)*

Jeżeli funkcja jest rosnąca albo malejąca na zbiorze, to jest tam różnowartościowa.

Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Np. funkcja $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ oraz $f(1) = 2$ i $f(2) = 1$ (rys. 0.9.3) jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$, ale nie jest rosnąca ani malejąca na tym zbiorze.



Rys. 0.9.3.

○ **Ćwiczenie* 0.9.4**

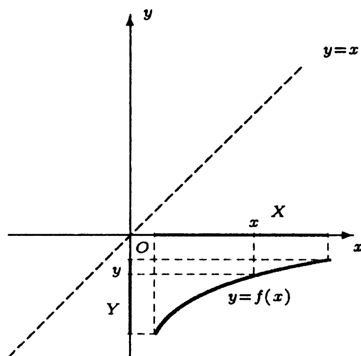
Czy istnieje funkcja różnowartościowa odwzorowująca odcinek $[0, 1]$ na odcinek $(0, 1]$?

● **Definicja 0.9.5** *(funkcja odwrotna)*

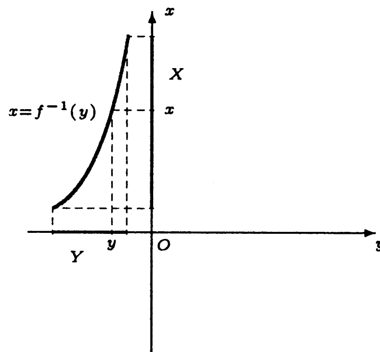
Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa na dziedzinie. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną przez warunek:

$$f^{-1}(y) \stackrel{def}{=} x \iff y = f(x), \quad \text{gdzie } x \in X, \ y \in Y.$$

Uwaga. Wykres funkcji odwrotnej f^{-1} otrzymujemy z wykresu funkcji prostej f odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$ (rys. 0.9.4-5) oraz zamieniając między sobą jednocześnie nazwy osi $x \longleftrightarrow y$. Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest rosnąca, a odwrotna do funkcji malejącej jest malejąca.



Rys. 0.9.4. Funkcja prosta.



Rys. 0.9.5. Funkcja odwrotna.

○ **Ćwiczenie 0.9.6**

Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:

a) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in [1, \infty)$; b) $g(x) = 2 - \sqrt[5]{x+1},\ x \in \boldsymbol{R}$;

c) $h(x) = x^3\,|x|,\ x \in \boldsymbol{R}$; d) $p(x) = \begin{cases} 3^x & \text{dla} \quad x < 0, \\ 5^x & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \end{cases} \quad x \in \boldsymbol{R}$;

e*) $q(x) = x + E(x), x \in \boldsymbol{R}$, gdzie $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby x;

f*) $r(x) = 0.x_2x_1x_3x_4\ldots,\ x \in (0,1)$,
gdzie $0.x_1x_2x_3x_4\ldots$ oznacza rozwinięcie dziesiętne liczby x.

● **Fakt 0.9.7** *(o składaniu funkcji prostej i odwrotnej)*

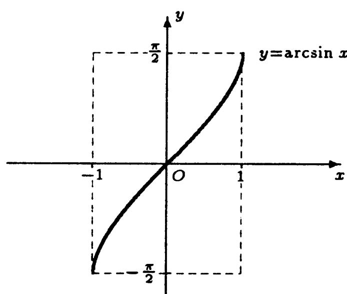
Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Wtedy

$$\bigwedge_{x \in X} f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{y \in Y} f\Big(f^{-1}(y)\Big) = y.$$

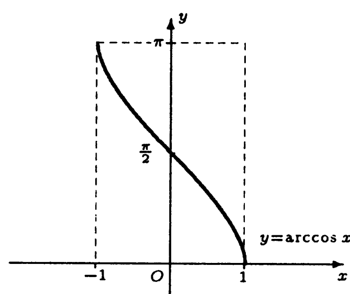
0.10 Funkcje cyklometryczne

● **Definicja 0.10.1** *(funkcje cyklometryczne)*

1. Funkcją arcsin (arkus sinus) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dziedziną funkcji arcsin jest przedział $[-1, 1]$ (rys. 0.10.1).
2. Funkcją arccos (arkus kosinus) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji kosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$. Dziedziną funkcji arccos jest przedział $[-1, 1]$ (rys. 0.10.2).

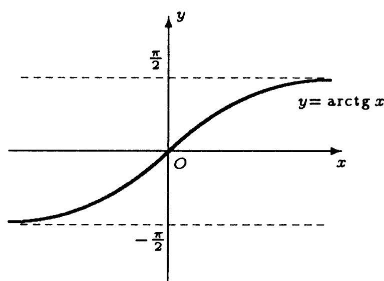


Rys. 0.10.1. Arcus sinus.

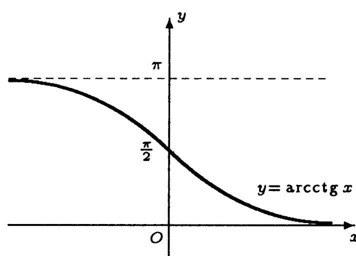


Rys. 0.10.2. Arkus kosinus.

3. Funkcją arctg (arkus tangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dziedziną funkcji arctg jest $\boldsymbol{R}$ (rys. 0.10.3).
4. Funkcją arcctg (arkus kotangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji kotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$. Dziedziną funkcji arcctg jest $\boldsymbol{R}$ (rys. 0.10.4).



Rys. 0.10.3. Arkus tangens.



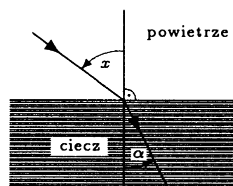
Rys. 0.10.4. Arkus kotangens.

Podstawowe tożsamości z funkcjami cyklometrycznymi

1. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$,
2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 0.10.2**

a) Promień światła pada pod kątem x, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, na ciecz o współczynniku załamania $n = 2$. Znaleźć funkcję opisującą kąt załamania α w zależności od kąta padania x;



b) W trójkącie równoramiennym ramiona mają długość b. Znaleźć funkcję wyrażającą miarę kąta przy wierzchołku tego trójkąta w zależności od długości podstawy x.

○ **Ćwiczenie 0.10.3**

Obliczyć wartości funkcji cyklometrycznych:

a) $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

b) $\arcsin(-0,4)$, $\arccos 0,91$, $\operatorname{arctg} 0,2378$, $\operatorname{arcctg}(-4,029)$.

W punkcie b) skorzystać z kalkulatora.

○ **Ćwiczenie* 0.10.4**

Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \cos(\arccos x)$; b) $y = \arccos(\cos x)$;

c) $y = \sin(\arccos x)$; d) $y = \arccos(\sin x)$.

0.11 Funkcje elementarne

● **Definicja 0.11.1** *(funkcje elementarne)*

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne. Funkcje, które

można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji, nazywamy funkcjami elementarnymi.

○ **Ćwiczenie 0.11.2**

Uzasadnić, że podane funkcje są elementarne:

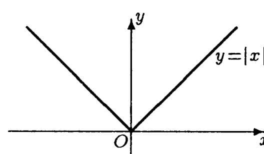
a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; b) $g(x) = 3^{\sqrt{1+2\cos x}}$;

c) $h(x) = \log_{\sin x} \operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)$; d) $k(x) = x^{\sin x}$.

● **Definicja 0.11.3** *(wartość bezwzględna)*

Wartością bezwzględną nazywamy funkcję $|\bullet| : \boldsymbol{R} \longrightarrow [0,\infty)$ określoną wzorem:

$$|x| \stackrel{def}{=} \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$



Rys. 0.11.1. Wartość bezwzględna.

Uwaga. Moduł jest funkcją elementarną, gdyż $|x| = \sqrt{x^2}$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

● **Definicja 0.11.4** *(wielomian)*

Wielomianem nazywamy funkcję $W : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ oraz $a_i \in \boldsymbol{R}$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, przy czym $a_n \neq 0$. Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu W i oznaczamy przez st W. Przyjmujemy dodatkowo, że wielomian $W(x) \equiv 0$ ma stopnień $-\infty$.

● **Przykład 0.11.5**

Funkcje $W_1(x) \equiv 3$; $W_2(x) = x^2 - 3x + 5$; $W_3(x) = 1 - x^{100}$ są wielomianami.

○ **Ćwiczenie* 0.11.6**

Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ nie jest wielomianem.

● **Definicja 0.11.7** *(funkcja wymierna)*

Funkcję, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch wielomianów, nazywamy funkcją wymierną.

● **Przykład 0.11.8**

Podane poniżej funkcje są wymierne:

$$f(x) = x^2 + 1; \quad g(x) = \frac{x^8}{x^6 - 1}; \quad h(x) = \frac{1}{x^5 + x^3 - 2x + 8}$$

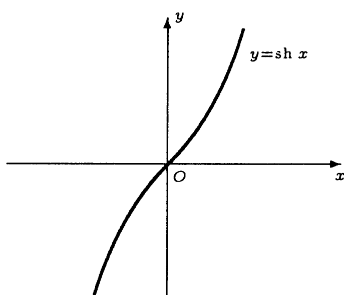
● **Definicja 0.11.9** *(funkcje hiperboliczne)*

1. Funkcję sh (sinus hiperboliczny) określamy wzorem:

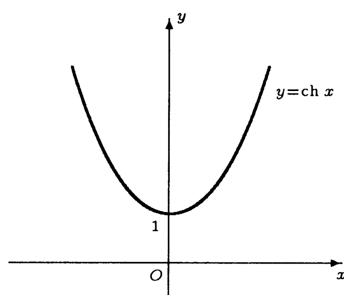
$$\operatorname{sh} x \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{gdzie} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

2. Funkcję ch (kosinus hiperboliczny) określamy wzorem:

$$\operatorname{ch} x \overset{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{gdzie} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$



Rys. 0.11.2. Sinus hiperboliczny.



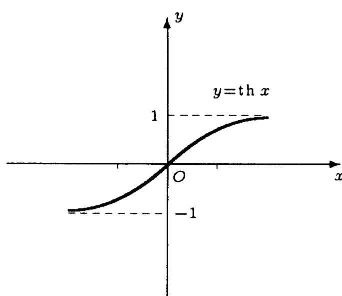
Rys. 0.11.3. Kosinus hiperboliczny.

3. Funkcję th (tangens hiperboliczny) określamy wzorem:

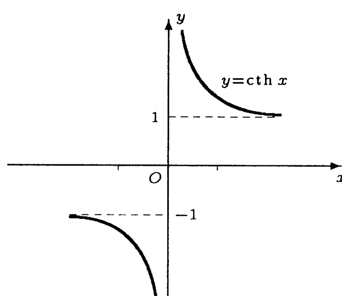
$$\operatorname{th} x \overset{def}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \text{gdzie} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

4. Funkcję cth (kotangens hiperboliczny) określamy wzorem:

$$\operatorname{cth} x \overset{def}{=} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \text{gdzie} \quad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}.$$



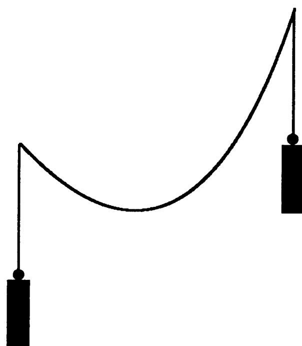
Rys. 0.11.4 Tangens hiperboliczny.



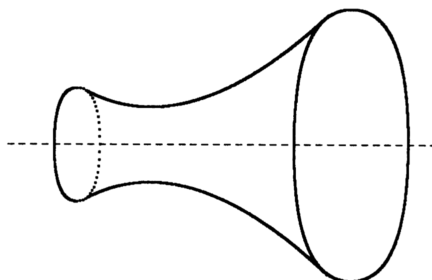
Rys. 0.11.5 Kotangens hiperboliczny.

Uwaga. W powyższej definicji e oznacza liczbę rzeczywistą równą w przybliżeniu $2.7182818\ldots$ (zobacz **Uwagę** po **Twierdzeniu 1.3.12**).

Przykład 0.11.10
Jednorodny i giętki łańcuch zawieszony w dwóch miejscach przyjmuje kształt wykresu funkcji kosinus hiperboliczny (rys. 0.11.6). Kształt ten przyjmuje także przekrój osiowy powierzchni obrotowej o minimalnym polu przechodzącej przez dwa okręgi o wspólnej osi (błona mydlana rozpięta na dwóch obręczach).



Rys. 0.11.6. Linia łańcuchowa.



Rys. 0.11.7. Minimalna powierzchnia.

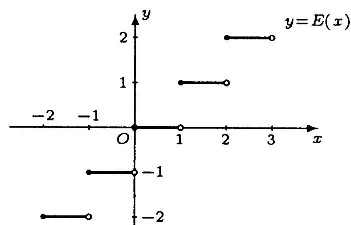
Podstawowe tożsamości z funkcjami hiperbolicznymi

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$,
2. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$,
3. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

0.12 Niektóre funkcje nieelementarne

Definicja 0.12.1 *(funkcja część całkowita)*
Funkcją część całkowita nazywamy funkcję $E : \boldsymbol{R} \xrightarrow{na} \boldsymbol{Z}$ określoną wzorem:

$$E(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \vdots \\ -2 & \text{dla } -2 \leqslant x < -1, \\ -1 & \text{dla } -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 2 & \text{dla } 2 \leqslant x < 3, \\ \vdots \end{cases}$$



Rys. 0.12.1. Funkcja część całkowita.

Część całkowita liczby x jest największą liczbą całkowitą nie większą niż x, co można zapisać również w sposób równoważny:

$$E(x) = k, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{Z} \iff k \leqslant x < k + 1.$$

○ Ćwiczenie 0.12.2

a) W Sejmie przyjmowane są ustawy, za którymi głosuje więcej niż połowa posłów. Na posiedzeniu było obecnych p posłów. Korzystając z funkcji część całkowita napisać wzór określający, ile należy oddać głosów „za", aby ustawa została przyjęta.

b) Przedsiębiorca chce kupić cukier w hurtowni. Cukier jest sprzedawany w jednokilogramowych torebkach oraz w workach zawierających 50 takich torebek. Cena jednego worka wynosi 80 zł, a torebki 2 zł. Znaleźć funkcję podającą jaką maksymalną liczbę kilogramów cukru może kupić przedsiębiorca dysponujący kwotą x złotych. Narysować wykres tej funkcji. Jak będzie wyglądał wykres tej funkcji, gdy przyjmiemy, że $x \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$?

○ Ćwiczenie* 0.12.3

Uzasadnić, że funkcja $f(x) = x - E(x)$ jest okresowa.

○ Ćwiczenie* 0.12.4

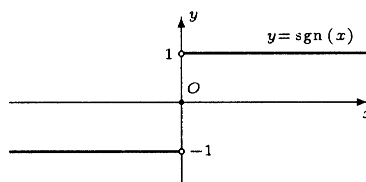
Uzasadnić, że funkcja część całkowita jest „prawie elementarna", gdyż dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$ prawdziwy jest wzór

$$E(x) = x - \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} \pi x).$$

● Definicja 0.12.5 *(funkcja signum)*

Funkcją signum nazywamy funkcję $\operatorname{sgn} : \boldsymbol{R} \xrightarrow{na} \{-1, 0, 1\}$ określoną wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

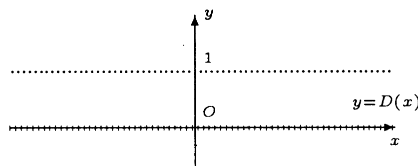


Rys. 0.12.2. Funkcja signum.

● Definicja 0.12.6 *(funkcja Dirichleta *)*

Funkcją Dirichleta nazywamy funkcję $D : \boldsymbol{R} \xrightarrow{na} \{0, 1\}$ określoną wzorem:

$$D(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \boldsymbol{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$



Rys. 0.12.3. Funkcja Dirichleta.

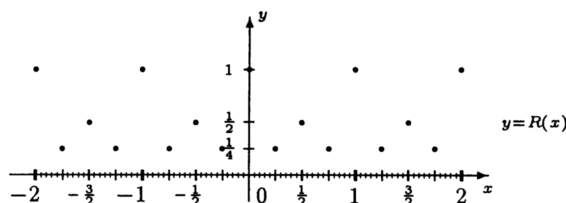
---

*Peter Gustav Dirichlet (1805–1859), matematyk niemiecki.

- **Definicja* 0.12.7** *(funkcja Riemanna* [†]*)*

Funkcją Riemanna nazywamy funkcję $R : \boldsymbol{R} \xrightarrow{na} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0\right\}$ określoną wzorem:

$$R(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q}, \text{ przy czym ułamek } \frac{p}{q} \text{ jest nieskracalny,} \\ 1 & \text{dla } x = 0, \\ 0 & \text{dla } x \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$



Rys. 0.12.4. Funkcja Riemanna.

0.13 Odpowiedzi i wskazówki

0.1.1 c) Wskazówka. Wykorzystać wzór $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;
e*) Wskazówka. Kilkakrotnie wykorzystać wzór $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

0.1.2 a) Wskazówka. $11 \pm 6\sqrt{2} = \left(3 \pm \sqrt{2}\right)^2$; b) Wskazówka. $7 \pm 5\sqrt{2} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)^3$.

0.1.3 $a = 2 - \sqrt{3}$; $a = 2 + \sqrt{3}$.

0.1.4 a) $\dfrac{w_1 + w_2}{2}$, $w_1 + \dfrac{|w_2 - w_1|}{\sqrt{2}}$; b*) przynajmniej jedna z liczb $\dfrac{x_1 + 2x_2}{3}$, $\dfrac{2x_1 + x_2}{3}$ jest niewymierna.

0.1.5*

a	2	2	2	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
b	3	$\frac{1}{2}$	$\log_2 3$	$\frac{1}{2}\log_2 3$	2	3	$2\log_2 3$	$\log_2 3$
c	8	$\sqrt{2}$	3	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	3	$\sqrt{3}$

0.2.3 a) tak, $m = 2$; b) tak, $m = 0$; c) nie; d) tak, $m = 0$.

0.2.4 a) tak, $M = 0$; b) nie; c) tak, $M = 5$; d) nie.

0.2.6 a) tak, $m = 0$, $M = 1$; b) nie; c) tak, $m = \dfrac{-3 - \sqrt{41}}{2}$, $M = \dfrac{-3 + \sqrt{41}}{2}$; d) tak, $m = -1$, $M = 1$.

0.3.3 a) tak, $a = 0$; b) nie; c) tak, $a = 0$; d) tak, $a = 1$.

0.3.4 a) tak, $b = 5$; b) tak, $b = 2$; c) nie; d)* tak, $b = \sqrt[3]{3}$.

0.3.5 a) element najmniejszy nie istnieje, element największy $b = 2$; b*) element najmniejszy $a = 2$, element największy nie istnieje; c*) element najmniejszy nie istnieje,

[†] Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826–1866), matematyk niemiecki.

element największy $b = \frac{\pi}{2}$.

0.3.8 **a)** $-\sqrt{2}$; **b)** 0; **c)** $-\infty$; **d)** -1.

0.3.9 **a)** 0; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** 1; **d)** ∞.

0.3.10 **a)** $\inf L = 0$, $\sup L = 2\pi$; **b)** $\inf V = 0$, $\sup V = \frac{8}{9}$.

0.4.2 **a)** $f(x) = 2\sin x$; **b)** $f(x) = |x| + 1$; **c)** $f(x) = \ln x$; **d)** $f(x) = x\sqrt{2}$.

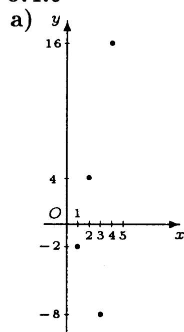
0.4.4 **a)** $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $W_f = \boldsymbol{R}$; **b)** $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$, $W_f = \boldsymbol{R}$;
c) $D_f = \bigcup\limits_{k \in Z} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $W_f = [1, 3]$; **d)** $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = (0, 1]$;
e) $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $W_f = (0, \infty)$; **f)** $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = (-\infty, -1)$.

0.4.5 **a)** $f(x) = \log[x(1-x)]$; **b)** $f(x) = \sqrt{(x-2)(4-x)}$; **c*)** $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$;
d*) $f(x) = \sqrt[4]{E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}} + \sqrt{x}$; **e*)** $f(x) = \frac{1}{E\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}}$;
f*) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2(x-2)(x-3)} + \frac{1}{x-2}$.

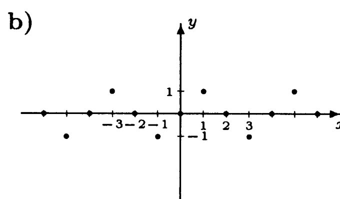
0.4.7 **a)** tak; **b)** nie; **c)** nie; **d)** tak.

0.4.9

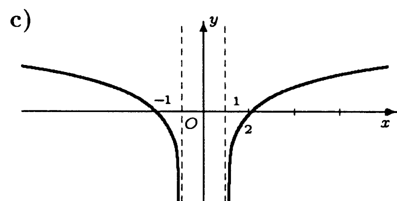
a)



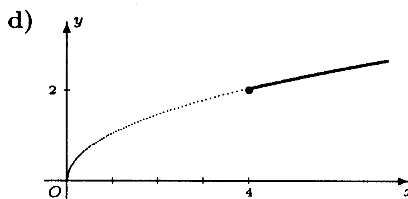
b)



c)



d)



0.4.11 **a)** tak; **b)** tak; **c)** nie; **d)** tak.

0.4.12* $\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}(x+1) + \frac{7}{2}$.

0.5.2 **a)** $T = \frac{2\pi}{3}$; **b)** $T = \frac{\pi}{2}$; **c)** $T = 2$; **d)** $T = 3\pi$.

0.5.3* Wskazówka. Obliczyć $f(x+2)$ i następnie $f(x+4)$.

0.5.8* Wskazówka. Pokazać, że $f(x) + f(-x)$ jest parzysta, a $f(x) - f(-x)$ nieparzysta.

0.6.3 **a)** tak, $m = 0$; **b)** nie; **c)** tak, $m = 1$; **d)** nie.

0.6.4 **a)** tak, $M = 1$; **b)** nie; **c)** tak, $M = 1$; **d)** tak, $M = -1$.

0.6.6 **a)** tak, $m = \frac{1}{3}$, $M = 1$; **b)** nie; **c)** tak, $m = -1$, $M = 1$; **d)** nie.

0.8.2 **a)** $(f \circ f)(x) = x^4$, $D_{f\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(f \circ g)(x) = x$, $D_{f\circ g} = [0, \infty)$, $(g \circ f)(x) = |x|$, $D_{g\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$ $D_{g\circ g} = [0, \infty)$;
b) $(f \circ f)(x) = 2^{2^x}$, $D_{f\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(f \circ g)(x) = 2^{\cos x}$, $D_{f\circ g} = \boldsymbol{R}$, $(g \circ f)(x) = \cos 2^x$, $D_{g\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(g\circ g)(x) = \cos(\cos x)$ $D_{g\circ g} = \boldsymbol{R}$; **c)** $(f\circ f)(x) = x^9$, $D_{f\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(f\circ g)(x) = \frac{1}{x}$, $D_{f\circ g} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $D_{g\circ f} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ g)(x) = \sqrt[9]{x}$, $D_{g\circ g} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$;
d) $(f \circ f)(x) = \frac{(1 + x^2)\, x}{x^4 + 3x^2 + 1}$, $D_{f\circ f} = \boldsymbol{R}$, $(f \circ g)(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, $D_{f\circ g} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1 + x^2}{x}$, $D_{g\circ f} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $(g \circ g)(x) = x$ $D_{g\circ g} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

0.8.3 **a)** $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{2 - x}{2 + x}$; **b)** $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$; **c)** $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \log x$; **d)** $f(x) = x + 2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

0.9.4* tak, np. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{n+2} & \text{dla } x = \frac{1}{n+1}, \text{ gdzie } n \in \boldsymbol{N}, \\ x & \text{dla pozostałych wartości } x. \end{cases}$

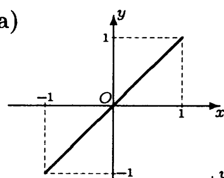
0.9.6 **a)** $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$; **b)** $g^{-1}(x) = (2 - x)^5 - 1$;
c) $h^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[4]{-x} & \text{dla } x < 0 \\ \sqrt[4]{x} & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$; **d)** $p^{-1}(x) = \begin{cases} \log_3 x & \text{dla } 0 < x < 1 \\ \log_5 x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$;
e*) $q^{-1}(x) = x - p$ dla $x \in [2p, 2p + 1)$, gdzie $p \in \boldsymbol{Z}$; **f*)** $r^{-1}(x) = r(x)$.

0.10.2 **a)** $\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right)$; **b)** $\beta = 2\arcsin\frac{x}{2b}$ lub $\beta = \arccos\frac{2b^2 - x^2}{2b^2}$, gdzie $0 < x < 2b$.

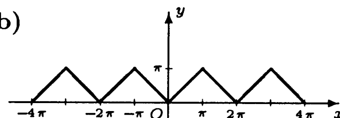
0.10.3 **a)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$; **b)** -0.411517, 0.427512, 0.233464, 2.893392.

0.10.4*

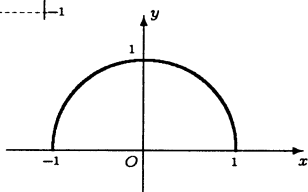
a)



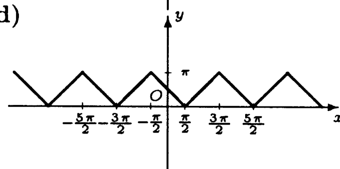
b)



c)



d)



0.12.2 **a)** $E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$; **b)** $50E\left(\frac{x}{80}\right) + E\left(\frac{x - 80E\left(\frac{x}{80}\right)}{2}\right)$.

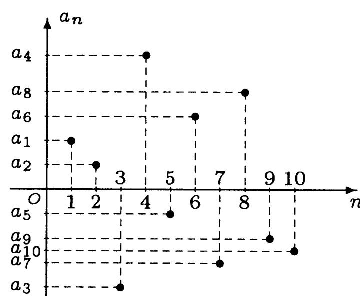
1

CIĄGI LICZBOWE

1.1 Podstawowe określenia

• **Definicja 1.1.1** *(ciąg liczbowy)*

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez a_n, b_n, itp. Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez $(a_n), (b_n)$ itp. Zbiór wyrazów ciągu (a_n), tj. $\{a_n : n \in \boldsymbol{N}\}$, oznaczamy krótko przez $\{a_n\}$. Ciągi będziemy przedstawiali na płaszczyźnie jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ (rys. 1.1.1).



Rys. 1.1.1. Ciąg (a_n).

Obrazowo: ciąg można traktować jako zbiór ponumerowanych liczb rzeczywistych, które są ustawione według rosnących numerów.

• **Przykład 1.1.2**

Ciągi liczbowe możemy określać:

A. wzorem:

a) $a_n = 2^n$; b) $b_n = \dfrac{1}{\sin n}$; c) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

d) $d_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n$; e) $e_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

B. rekurencyjnie (tzn. każdy wyraz ciągu wyraża się przez poprzednie):

a) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 3$ – ciąg arytmetyczny;

b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n$ – ciąg geometryczny;

c) $c_1 = 1, c_2 = 1, c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$ – ciąg Fibbonaciego;

d) $d_1 = 2, d_{n+1} = d_1 d_2 \ldots d_n$;

C. opisowo:

a) a_n – n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π;

b) b_n – n-ta liczba pierwsza;

c) c_n – przedostatnia cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby $(n+3)^2$.

○ Ćwiczenie 1.1.3

Znaleźć wzór określający n-ty wyraz ciągu:

a) $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$; b) $(c_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$;

c) $(b_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$; d*) $(d_n) = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots)$;

e) $(e_n) = (1, 4, 27, 256, \ldots)$; f*) $(f_n) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$;

g*) $(g_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$; h*) $(h_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$;

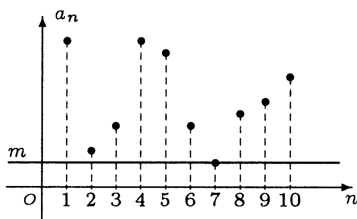
i*) $(i_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots)$; j*) $(j_n) = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \ldots)$.

● Definicja 1.1.4 *(ciąg ograniczony z dołu)*

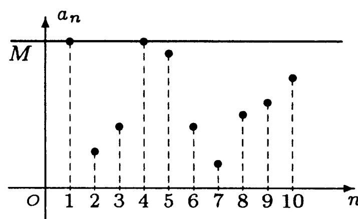
Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, tzn.

$$\bigvee_{m\in \mathbf{R}} \bigwedge_{n\in \mathbf{N}} a_n \geqslant m.$$

Obrazowo: ciąg jest ograniczony z dołu, gdy wszystkie jego wyrazy leżą nad pewną prostą poziomą (rys. 1.1.2).



Rys. 1.1.2. Ciąg ograniczony z dołu.



Rys. 1.1.3. Ciąg ograniczony z góry.

● Definicja 1.1.5 *(ciąg ograniczony z góry)*

Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, tzn.

$$\bigvee_{M\in \mathbf{R}} \bigwedge_{n\in \mathbf{N}} a_n \leqslant M.$$

Obrazowo: ciąg jest ograniczony z góry, gdy wszystkie jego wyrazy leżą pod pewną prostą poziomą (rys. 1.1.3).

○ Ćwiczenie 1.1.6

Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu:

a) $a_n = \sqrt[n]{2}$; b) $b_n = \frac{n}{n+1}$; c) $c_n = \log_3 n$; d) $d_n = 10n - n^2$; e) $e_n = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3n}$.

○ **Ćwiczenie 1.1.7**
Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z góry:

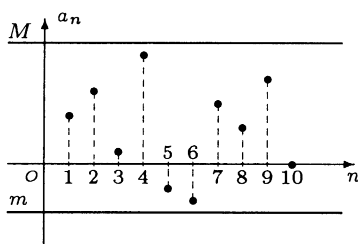
a) $a_n = 3^{-n}$; b) $b_n = \frac{n^2+1}{n}$; c) $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

d) $d_n = \frac{(n+1)!}{n!+100}$; e) $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; f*) $f_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

● **Definicja 1.1.8** *(ciąg ograniczony)*
Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony, tzn.

$$\bigvee_{m,M\in R} \bigwedge_{n\in N} m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Obrazowo: ciąg jest ograniczony, gdy wszystkie jego wyrazy leżą między dwiema prostymi poziomymi (rys. 1.1.4). Ciąg, który nie jest ograniczony, nazywamy nieograniczonym.



Rys. 1.1.4. Ciąg ograniczony.

Uwaga. W definicji można tak dobrać stałe m i M, aby $0 < M = -m$. Wtedy

$$\bigwedge_{n\in N} |a_n| \leqslant M.$$

○ **Ćwiczenie 1.1.9**
Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone:

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; b) $b_n = 4 - 3\cos n$; c) $c_n = n\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$; d) $d_n = (-2)^n$.

● **Definicja 1.1.10** *(ciąg rosnący)*
Ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli

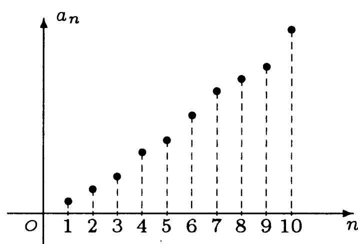
$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots, \text{ tzn. } \bigwedge_{n\in N} a_n < a_{n+1}.$$

Obrazowo: ciąg jest rosnący, gdy jego wyrazy powiększają się ze wzrostem indeksu (rys. 1.1.5).

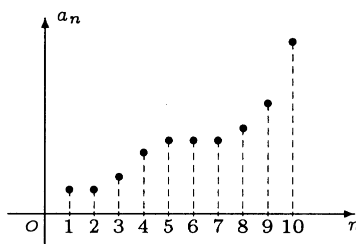
Definicja 1.1.11 *(ciąg niemalejący)*
Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeżeli

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots, \text{ tzn. } \bigwedge_{n \in N} a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Obrazowo: ciąg jest niemalejący, gdy ze wzrostem indeksu wyrazy ciągu powiększają się lub pozostają bez zmiany (rys. 1.1.6).



Rys. 1.1.5. Ciąg rosnący.



Rys. 1.1.6. Ciąg niemalejący.

Uwaga 1. Analogicznie definiuje się ciąg malejący i nierosnący. Ciągi rosnące, malejące, nierosnące i niemalejące nazywamy monotonicznymi. Definicje ciągów monotonicznych są szczególnymi przypadkami definicji funkcji monotonicznych. Wprowadza się także pojęcie ciągów monotonicznych od numeru $n_0 \in \boldsymbol{N}$.

Uwaga 2. Monotoniczność ciągu (a_n) możemy ustalić badając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$, a ciągu (b_n) o wyrazach dodatnich porównując iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ z 1. Korzystamy wtedy z tabeli:

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	**Ciąg**
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
$\geqslant 0$	$\geqslant 1$	niemalejący
$\leqslant 0$	$\leqslant 1$	nierosnący

Ćwiczenie 1.1.12
Sprawdzić, że podane ciągi są rosnące:

a) $a_n = \frac{n-1}{n}$; b) $b_n = n^2 - n$; c) $c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$;

d*) $d_n = 5^n - 3^n - 2^n$; e) $e_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$; f) $f_n = \log_{n+1} n$;

g*) $g_n = n^{100} - n^{50} + 1$; h*) $h_n = \begin{cases} 3n+1 & \text{dla } n \leqslant 10 \\ 2^{n-6} & \text{dla } n > 10 \end{cases}$.

○ **Ćwiczenie 1.1.13**
Sprawdzić, że podane ciągi są niemalejące:

a) $a_n = \left[E\left(\frac{n+10}{n+1}\right)\right]^{-1}$; b) $b_n = n + 10 + |n - 10|$; c) $c_n = n + \left|\sin \frac{n\pi}{2}\right|$.

○ **Ćwiczenie 1.1.14**
Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

a) $a_n = \frac{4n+1}{n+1}$; b) $b_n = \sqrt{n^2+2n} - n$;

c) $c_n = \frac{100^n}{n!}$; d*) $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

e) $e_1 = \sqrt{2}$, $e_{n+1} = \sqrt{2+e_n}$; f*) $f_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$;

g) $g_n = \sqrt[n]{2^n+1}$; h*) $h_n = \sqrt[n+1]{n+1}$.

○ **Ćwiczenie 1.1.15**
Dla $n \geqslant 4$ niech p_n oznacza długość największej przekątnej n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Czy ciąg (p_n) jest monotoniczny?

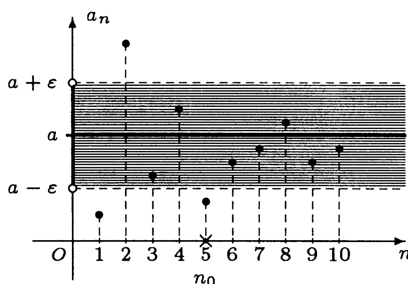
1.2 Granice ciągów

● **Definicja 1.2.1** *(granica właściwa ciągu)*
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \boldsymbol{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in \boldsymbol{N}} \bigwedge_{n\in \boldsymbol{N}} \left[(n > n_0) \Longrightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)\right].$$



Rys. 1.2.1. Granica właściwa ciągu.

Obrazowo: ciąg jest zbieżny do granicy a, gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko punktu a (rys. 1.2.1). Zamiast równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ można pisać $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Można również pisać krótko $\lim a_n = a$ lub $a_n \longrightarrow a$.

○ **Ćwiczenie 1.2.2**

Korzystając z definicji uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-3n}{1+n} = -3$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$;

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$; d) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

● **Twierdzenie 1.2.3** *(o jednoznaczności granicy ciągu)*

Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

● **Definicja 1.2.4** *(granice niewłaściwe ciągu)*

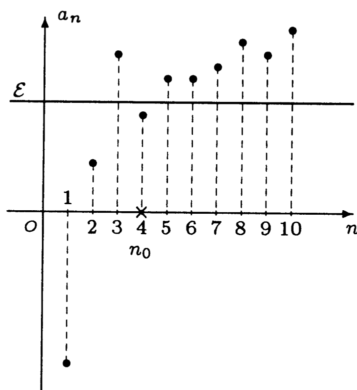
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

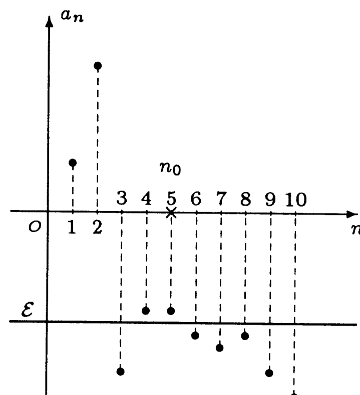
wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\mathcal{E}>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} \left[(n > n_0) \Longrightarrow (a_n > \mathcal{E})\right].$$

Obrazowo: ciąg jest zbieżny do ∞, gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (rys. 1.2.2). Zamiast równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ można pisać $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Można również pisać krótko $\lim a_n = \infty$ lub $a_n \longrightarrow \infty$.



Rys. 1.2.2. Granica niewłaściwa ∞.



Rys. 1.2.3. Granica niewłaściwa $-\infty$.

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\mathcal{E}<0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} \left[(n > n_0) \Longrightarrow (a_n < \mathcal{E})\right].$$

Obrazowo: ciąg jest zbieżny do $-\infty$, gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy są mniejsze od dowolnie małej liczby (rys. 1.2.3). Zamiast równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ można pisać $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, można również pisać krótko $\lim a_n = -\infty$ lub $a_n \longrightarrow -\infty$.

Uwaga. Ciągi, które nie mają granicy właściwej ani niewłaściwej, nazywamy ciągami rozbieżnymi. Przykładami takich ciągów są: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. W niektórych podręcznikach ciągi zbieżne do ∞ lub $-\infty$ nazywa się ciągami rozbieżnymi do ∞ lub $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 1.2.5**

Korzystając z definicji uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n - 5) = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n-1} = \infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(3 - \log_2 n) = -\infty$.

● **Fakt 1.2.6** *(o niezależności granicy od początkowych wyrazów ciągu)*

Granica ciągu zbieżnego do granicy właściwej lub niewłaściwej nie zależy od wartości skończenie wielu jego wyrazów.

○ **Ćwiczenie 1.2.7**

Zbadać, czy podane ciągi mają granice (właściwe lub niewłaściwe):

a) $a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{dla} \quad n \leqslant 100, \\ \dfrac{n^2}{n^2+1} & \text{dla} \quad n > 100; \end{cases}$ b) $b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{dla} \quad n \leqslant 2000, \\ 3^n & \text{dla} \quad n > 2000. \end{cases}$

● **Fakt 1.2.8** *(granice ciągu geometrycznego)*

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{dla} \quad |q| < 1, \\ = 1 & \text{dla} \quad q = 1, \\ = \infty & \text{dla} \quad q > 1, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad q \leqslant -1. \end{cases}$$

○ **Ćwiczenie 1.2.9**

Znaleźć granice podanych ciągów:

a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; b) $b_n = 3^n$; c) $c_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$.

○ **Ćwiczenie 1.2.10**

Zbadać istnienie granic ciągów (x_n) w zależności od parametru $p \in \boldsymbol{R}$, jeżeli:

a) $x_n = \left(p^2 + 2p - 2\right)^n$; b) $x_n = \left(\sin p + \frac{1}{2}\right)^n$.

● **Definicja 1.2.11** *(podciąg)*

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem oraz niech (k_n) będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Podciągiem ciągu (a_n) nazywamy ciąg (b_n) określony wzorem

$$b_n \stackrel{def}{=} a_{k_n}, \text{ gdzie } n \in \boldsymbol{N}.$$

Obrazowo: podciągiem nazywamy ciąg pozostały po skreśleniu pewnej liczby (być może nieskończonej) wyrazów ciągu wyjściowego (zobacz ilustracja niżej).

$$\begin{aligned}(b_n) &= (\quad b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4, \quad b_5, \quad \ldots),\\ (a_n) &= (\not{a}_1, \boxed{a_2}, \not{a}_3, \not{a}_4, \boxed{a_5}, \not{a}_6, \boxed{a_7}, \boxed{a_8}, \boxed{a_9}, \not{a}_{10}, \ldots).\end{aligned}$$

- **Przykład 1.2.12**

a) ciąg liczb parzystych $b_n = 2n$ jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $a_n = n$;

b) ciąg $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}$ jest podciągiem ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

c) ciąg $(b_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$ nie jest podciągiem ciągu $(a_n) = (1, 2, 3, \ldots)$.

- **Twierdzenie 1.2.13** *(o granicy podciągu ciągu zbieżnego)*

Każdy podciąg ciągu zbieżnego (do granicy właściwej lub niewłaściwej) jest zbieżny do tej samej granicy.

○ **Ćwiczenie 1.2.14**

Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{3} = 1$.

○ **Ćwiczenie 1.2.15**

Wyznaczyć granice podanych ciągów:

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \frac{n}{n+1} & \text{dla } n \text{ parzystych;} \end{cases}$ b) $b_n = \begin{cases} 2^n & \text{dla } n \text{ podzielnych przez 3,} \\ n^3 & \text{dla } n \text{ niepodzielnych przez 3.} \end{cases}$

○ **Ćwiczenie 1.2.16**

Wybierając odpowiednie podciągi uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n + (-1)^n n^2\right]$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$.

1.3 Twierdzenia o granicach właściwych ciągów

- **Twierdzenie 1.3.1** *(o ograniczoności ciągu zbieżnego)*

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Uwaga. Implikacja odwrotna w powyższym twierdzeniu nie jest prawdziwa. Kontrprzykładem jest ciąg $a_n = (-1)^n$, który jest ograniczony, ale nie jest zbieżny.

- **Fakt 1.3.2** *(o równoważności granic)*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

○ **Ćwiczenie 1.3.3**

Korzystając z powyższego faktu wykazać podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}=0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=0$.

■ **Twierdzenie 1.3.4** *(o arytmetyce granic ciągów)*

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, gdzie $c\in\boldsymbol{R}$,

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$,

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^p$, gdzie $p\in\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$,

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$, gdzie $k\in\boldsymbol{N}\setminus\{1\}$.

Uwaga. Wzory **1.** i **4.** są prawdziwe także dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników. We wzorach **6.** i **7.** zakładamy, że wyrażenia po obu stronach znaku równości mają sens.

HUMOR

Z pracy egzaminacyjnej:

„Dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n) zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n,$$

gdyż logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów".

○ **Ćwiczenie 1.3.5**

Obliczyć podane granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n^3}{n^3+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-1}{3^n+2}\right)^5$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n^2+1\right)^{499}}{\left(n^3+1\right)^{333}}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+8}-\sqrt{n^2+4}\right)$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[3]{8^n+1}}$.

○ **Ćwiczenie 1.3.6**

a) Dla $n \geqslant 3$ niech α_n oznacza miarę kąta wewnętrznego n–kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$;

b) Dla $n \geqslant 6$ niech p_n oznacza długość najkrótszej, a q_n długość najdłuższej przekątnej n–kąta foremnego, którego bok ma długość 1. Obliczyć granice: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$;

c) Dla $n \geqslant 3$ niech S_n oznacza pole n–kąta foremnego opisanego na kole o promieniu 1. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

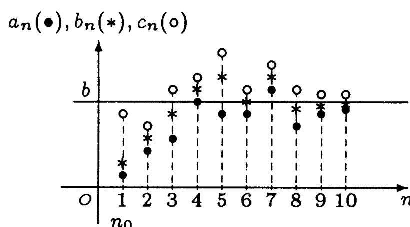
Podać interpretacje geometryczne otrzymanych wyników.

■ **Twierdzenie 1.3.7** *(o trzech ciągach)*

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.



Rys. 1.3.1. Ilustracja twierdzenia o trzech ciągach.

○ **Ćwiczenie 1.3.8**

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} = 5$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + n\sin n}{n^2+1} = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E\left(\sqrt{2}n\right)}{n} = \sqrt{2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{n+1}\left(n^2+1\right) = 2$;

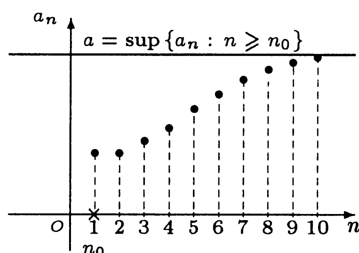
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{3n+2} = 1$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}} = 1$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n^3+n^2+1} = 1$; i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$;

j*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{4^n+2}} + \dfrac{2^2}{\sqrt{4^n+2^2}} + \dfrac{2^3}{\sqrt{4^n+2^3}} + \ldots + \dfrac{2^n}{\sqrt{4^n+2^n}}\right) = 2$.

■ **Twierdzenie 1.3.9** *(o ciągu monotonicznym i ograniczonym)*

Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący dla $n \geqslant n_0$ oraz ograniczony z góry, to jest zbieżny do granicy właściwej $\sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$.



Rys. 1.3.2. Ilustracja twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

Uwaga. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla ciągu nierosnącego i ograniczonego z dołu.

HUMOR

Twierdzenie o policjantach i pijaku.

Dwaj policjanci prowadzą między sobą pijaka. Jeżeli policjanci idą do izby wytrzeźwień, to trafi tam także pijak.

○ **Ćwiczenie 1.3.10**

Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100^n}{n!} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[(3n)!]^2}{(2n)!(4n)!} = 0$;

c*) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$, gdzie $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ dla $n \in N$;

d*) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$, gdzie $c_1 = 1$ oraz $c_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + c_n}$ dla $n \in N$.

○ **Ćwiczenie 1.3.11**

Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$; b*) $b_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{2}{(n+1)!}$;

c*) $c_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; d) $d_n = \dfrac{n!}{n^n}$; e*) $e_n = \sqrt[n]{n}$.

W przykładach d) i e) ułożyć równania z granicami i następnie je wyznaczyć.

■ **Twierdzenie 1.3.12** *(określenie liczby e)*

Ciąg $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem jest zbieżny.

Uwaga. Granicę tego ciągu oznaczamy przez e:

$$e \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

$$2,7182818285.$$

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy przez ln; $\ln x \overset{def}{=} \log_e x$. Funkcję wykładniczą przy podstawie e nazywamy eksponens i oznaczamy przez exp; $\exp x \overset{def}{=} e^x$. Niżej podajemy dwa łatwe do zapamiętania przybliżenia wymierne liczby e :

$$e \approx \frac{878}{323}, \quad e \approx \frac{335588^*}{123456}$$

HUMOR

Na ostatnim wykładzie z analizy matematycznej prowadzący zapytał studentów, gdzie na innych przedmiotach spotkali się z liczbą e. Usłyszał następujące odpowiedzi:
liczba e występuje w opisie rozpadu promieniotwórczego;
wzór na gęstość rozkładu normalnego zawiera tę liczbę;
w opisie linii łańcuchowej także pojawia się e.
Po zachęceniu studentów do podawania dalszych przykładów jeden z nich nieśmiało odpowiedział:
ja ostatnio widziałem liczbę e na proszku do prania.

● **Fakt 1.3.13** *(o ciągach z granicą e)*
Jeżeli ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Uwaga. Fakt powyższy jest prawdziwy także wtedy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 1.3.14**
Obliczyć podane granice ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{3n}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$; c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$;

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n+1}$; e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n}$; f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$.

○ **Ćwiczenie* 1.3.15**
Pokazać, że:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e$;

b) liczba e jest niewymierna.

---

* przybliżenie to znaleźli w 1999 r. studenci wydziału Informatyki i Zarządzania.

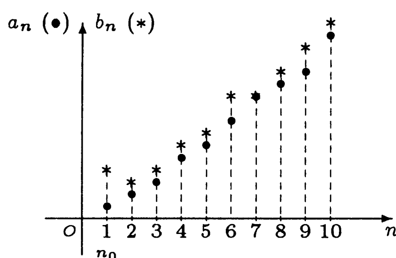
1.4 Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów

● **Twierdzenie 1.4.1** *(o dwóch ciągach)*
Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają warunki:

1. $a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Uwaga. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do granicy niewłaściwej $-\infty$.



Rys. 1.4.1. Ilustracja twierdzenia o dwóch ciągach.

○ **Ćwiczenie 1.4.2**
Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[4^n + (-1)^n\right] = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n + 3n) = \infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(2\cos n - 5)\, n^2\right] = -\infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty$.

● **Twierdzenie 1.4.3** *(o granicach niewłaściwych ciągów)*

$a + \infty = \infty$ dla $-\infty < a \leqslant \infty$	$a \cdot \infty = \infty$ dla $0 < a \leqslant \infty$
$\frac{a}{\infty} = 0$ dla $-\infty < a < \infty$	$\frac{a}{0^+} = \infty$ dla $0 < a \leqslant \infty$
$a^{\infty} = 0$ dla $0^+ \leqslant a < 1$	$a^{\infty} = \infty$ dla $1 < a \leqslant \infty$
$\infty^b = 0$ dla $-\infty \leqslant b < 0$	$\infty^b = \infty$ dla $0 < b \leqslant \infty$

Uwaga. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu odpowiednich twierdzeń. Np. równość $\frac{a}{0^+} = \infty$, gdzie $0 < a \leqslant \infty$, jest skróconą postacią twierdzenia:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \text{ gdzie } 0 < a \leqslant \infty \\ 2.\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0, \text{ gdzie } b_n > 0 \text{ dla każdego } n \in N \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Podobnie wygląda tabelka „działań” z symbolem $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 1.4.4**

Obliczyć podane granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-(n+1)!}{n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (5^n - 4^n - 3^n - 2^n)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+1}\right)^{n-n^2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(n^2+1)^{n+1}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+n^2-n^5}{1+n^3}$;

g*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4}{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4}$; h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+3!+5!+\ldots+(2n-1)!}{2!+4!+6!+\ldots+(2n)!}$.

● **Definicja 1.4.5** *(wyrażenia nieoznaczone)*

Symbole :

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

● **Przykład 1.4.6**

Ciągi (x_n) i (y_n) spełniają warunki: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, jednak granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ przyjmuje różne wartości albo też nie istnieje.

a) Niech $x_n = n^2$ oraz $y_n = n$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

b) Niech $x_n = an$, gdzie $a > 0$ oraz $y_n = n$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

c) Niech $x_n = n$ oraz $y_n = n^2$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

d) Niech $x_n = (2+(-1)^n)\,n$ oraz $y_n = n$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2+(-1)^n)$ — nie istnieje.

○ **Ćwiczenie 1.4.7**

Podać przykłady ciągów świadczące, że wyrażenia $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 są nieoznaczone. Rozważyć wszystkie wartości jakie mogą przyjąć te wyrażenia.

1.5 Granice dolna i górna ciągów

● **Twierdzenie 1.5.1** *(Bolzano* – Weierstrassa†, o ciągach ograniczonych)*
Jeżeli ciąg jest ograniczony, to ma podciąg zbieżny do granicy właściwej.

Uwaga. Jeżeli ciąg nie jest ograniczony, to ma podciąg zbieżny do $-\infty$ lub ∞.

● **Definicja 1.5.2** *(punkty skupienia ciągu)*

1. Liczba rzeczywista a jest właściwym punktem skupienia ciągu, jeżeli istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do granicy a.
2. Symbol $-\infty(\infty)$ jest niewłaściwym punktem skupienia ciągu, jeżeli istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do $-\infty(\infty)$.

○ **Ćwiczenie 1.5.3**
Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

a) $a_n = (-1)^n$; b) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; c) $c_n = 2^n + (-2)^n$; d*) $d_n = \sin n$.

○ **Ćwiczenie 1.5.4**
Podać przykłady ciągów, które mają podane zbiory punktów skupienia:

a) $\{1,2\}$; b) $\{0,\infty\}$; c*) $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, 0\right\}$; d*) $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$.

○ **Ćwiczenie* 1.5.5**
Uzasadnić, że nie istnieje ciąg, którego zbiorem punktów skupienia jest $\mathbb{Q}$.

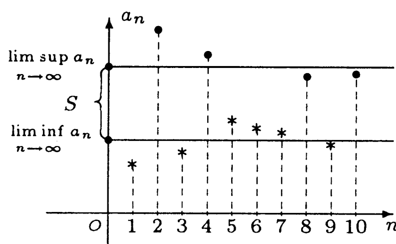
● **Definicja 1.5.6** *(granice dolna i górna ciągu)*
Niech S oznacza zbiór punktów skupienia ciągu (a_n) (właściwych i niewłaściwych).

1. Granicę dolną ciągu (a_n) określamy wzorem
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \stackrel{def}{=} \inf S.$$
2. Granicę górną ciągu (a_n) określamy wzorem
$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \stackrel{def}{=} \sup S.$$

Uwaga. Jeżeli $\infty \in S$, to przyjmujemy, że $\sup S = \infty$. Podobnie, jeżeli $-\infty \in S$, to przyjmujemy, że $\inf S = -\infty$. Ponadto, jeżeli $S = \{-\infty\}$, to $\sup S = -\infty$. Analogicznie, jeżeli $S = \{\infty\}$, to $\inf S = \infty$. Do oznaczania granicy dolnej i górnej ciągu (a_n) stosowane są także odpowiednio symbole $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

---

*Bernhard Bolzano (1781–1848), matematyk i filozof czeski.
†Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1895), matematyk niemiecki.



Rys. 1.5.1. Granica dolna i górna ciągu.

○ **Ćwiczenie 1.5.7**
Znaleźć granice dolne i górne podanych ciągów:

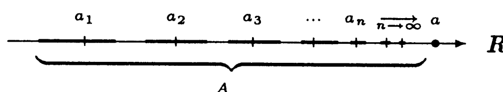
a) $a_n = (-1)^n$; b) $b_n = (-3)^n$; c) $c_n = \cos\frac{n\pi}{4}$; d*) $d_n = 3(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} + 7(-1)^{E\left(\frac{n}{3}\right)}$.

○ **Ćwiczenie* 1.5.8**
Niech z_n oznacza liczbę zer na końcu liczby $n!$. Zbadać czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{n}$.

1.6 Punkty skupienia zbiorów*

● **Definicja* 1.6.1** *(właściwy punkt skupienia zbioru)*
Punkt $a \in \boldsymbol{R}$ nazywamy właściwym punktem skupienia zbioru $A \subset \boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (a_n) punktów tego zbioru spełniający warunki:

$$a_n \neq a \text{ dla każdego } n \in \boldsymbol{N} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$



Rys. 1.6.1. Punkt właściwy skupienia zbioru.

Uwaga*. W podobny sposób określa się lewostronny i prawostronny właściwy punkt skupienia zbioru. Zbiór punktów skupienia ciągu na ogół nie pokrywa się ze zbiorem punktów skupienia zbioru wartości tego ciągu. Np. dla ciągu $(a_n) = ((-1)^n)$ zbiór jego punktów skupienia to $\{-1, 1\}$, podczas gdy zbiór wartości tego ciągu, tj. zbiór $\{-1, 1\}$, nie ma punktu skupienia. Punkty zbioru, które nie są jego punktami skupienia, nazywamy punktami izolowanymi.

● **Definicja* 1.6.2** *(niewłaściwe punkty skupienia zbioru)*
Symbol $\infty\,(-\infty)$ nazywamy niewłaściwym punktem skupienia zbioru $A \subset \boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (a_n) punktów tego zbioru taki, że:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,(-\infty).$$

○ **Ćwiczenie* 1.6.3**
Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych zbiorów:

a) $[0,1) \cup \{3,4,5\}$; b) $\left\{2(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$; c) $\left\{p\cos\frac{p\pi}{2} : p \in Z\right\}$;

d) $\left\{x + \sqrt{2} : x \in Q\right\}$; e*) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in N\right\}$; f*) $\{\operatorname{tg} n : n \in N\}$.

1.7 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 1.3.4** *(o granicy iloczynu ciągów)*
Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_0 \Longrightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon\right).$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ze zbieżności ciągu (a_n) wynika jego ograniczoność. Mamy zatem

$$\bigvee_{M_a>0} \bigwedge_{n\in N} |a_n| \leqslant M_a.$$

Niech M będzie większą z dwóch liczb M_a, $|b|$, tj. niech $M = \max\{M_a, |b|\}$. W definicji granicy ciągu (a_n) przyjmujemy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. Wtedy

$$\bigvee_{n_a\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_a \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon'\right).$$

Podobnie w definicy granicy ciągu (b_n) przyjmujemy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. Wtedy

$$\bigvee_{n_b\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_b \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon'\right).$$

Pokażemy, że liczba $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$ spełnia początkowy warunek. Rzeczywiście, dla $n > n_0$ mamy bowiem

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\ &\leqslant M_a \cdot \varepsilon' + M \cdot \varepsilon' = M_a \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■ **Dowód Twierdzenia 1.3.7** *(o trzech ciągach)*
Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_b\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_b \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon\right).$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy ze zbieżności ciągów (a_n) i (c_n) do granicy b wynikają warunki:

$$\bigvee_{n_a\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_a \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon\right), \quad \bigvee_{n_c\in N} \bigwedge_{n\in N} \left(n > n_c \Longrightarrow |c_n - b| < \varepsilon\right).$$

Niech n_b oznacza największą spośród liczb n_a, n_c oraz n_0, tj. niech $n_b = \max\{n_a, n_c, n_0)$. Wtedy dla $n > n_b$ zachodzą nierówności

$$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon, \qquad b - \varepsilon < c_n < b + \varepsilon.$$

Ponieważ dla $n \geqslant n_b \geqslant n_0$ spełnione są nierówności: $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, więc

$$b - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < b + \varepsilon.$$

Stąd

$$|b_n - b| < \varepsilon \text{ dla } n > n_b.$$

■ **Dowód Twierdzenia 1.3.9** *(o ciągu monotonicznym i ograniczonym)*
Niech $a = \sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$. Liczba a jest skończona, gdyż ciąg (a_n) jest ograniczony z góry. Mamy pokazać, że granicą ciągu (a_n) jest a; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Równość ta jest równoważna zdaniu

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_a\in N} \bigwedge_{n\in N} (n > n_a \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z definicji kresu górnego zbioru $\{a_n : n \geqslant n_0\}$ otrzymamy, że

$$\bigwedge_{n\geqslant n_0} a_n \leqslant a \text{ oraz } \bigvee_{n_1\in N} a - \varepsilon < a_{n_1}.$$

Niech teraz n_a będzie większą z liczb n_0 i n_1, tj. niech $n_a = \max(n_0, n_1)$. Wtedy z monotoniczności ciągu (a_n) od numeru n_0 mamy

$$\bigwedge_{n\geqslant n_a} (a_n \leqslant a < a + \varepsilon \text{ oraz } a - \varepsilon < a_{n_1} \leqslant a_n).$$

Stąd $|a_n - a| < \varepsilon$ dla każdego $n \geqslant n_a$.

■ **Dowód Twierdzenia 1.3.12** *(określenie liczby e)*
Na wstępie pokażemy, że ciąg (e_n) jest rosnący. Mamy

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right] = 1.$$

Ostatnią nierówność otrzymamy przyjmując $r = n+1$ oraz $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ w nierówności Bernoulliego: $(1+x)^r > 1 + rx$, gdzie $r \in N\setminus\{1\}$ oraz $0 \neq x > -1$. Ciąg (e_n) jest zatem rosnący. Pokażemy teraz ograniczoność z góry tego ciągu. Będziemy korzystać ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

oraz z nierówności $n! > 2^{n-1}$ prawdziwej dla każdego $n \geqslant 3$. Nierówność ta jest łatwa do wykazania przy pomocy indukcji matematycznej. Mamy zatem

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$< 1+\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

To oznacza, że ciąg jest ograniczony z góry przez 3. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg (e_n) jest zbieżny.

1.8 Odpowiedzi i wskazówki

1.1.3 a) $a_n = 2n-1$; **b)** $b_n = \cos(n-1)\pi = (-1)^{n+1}$ **c)** $c_n = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$;
d*) $d_n = E\left(\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right)$; **e)** $e_n = n^n$;
f*) $f_n = 1 - \operatorname{sgn}\left|\sin\frac{(n-1)\pi}{6}\right| = E\left[E\left(\frac{n+2}{3}\right) - \frac{n-1}{3}\right]$;
g*) $g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$; **i*)** $i_n = E\left(\frac{n+1}{n}\right)\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$;
j*) $j_n = 2E\left(\frac{n+1}{2}\right)\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| + \left[2E\left(\frac{n}{2}\right)-1\right]\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|$.

1.1.6 a) tak, $m=1$; **b)** tak, $m=\frac{1}{2}$; **c)** tak, $m=0$; **d)** nie; **e)** tak, $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.1.7 a) tak, $M=\frac{1}{3}$; **b)** nie; **c)** tak, $M=1$; **d)** nie; **e)** tak, $M=3$; **f*)** nie.

1.1.9 a) tak, $0 < a_n \leqslant \frac{1}{2}$; **b)** tak, $1 < b_n < 7$; **c)** nie; **d)** nie.

1.1.14 a) ciąg rosnący; **b)** ciąg rosnący; **c)** ciąg rosnący od $n_0 = 100$, a niemalejący od $n_0 = 99$; **d)** ciąg rosnący; **e)** ciąg rosnący; **f*)** ciąg rosnący; **g)** ciąg malejący; **h*)** ciąg malejący od $n_0 = 2$.

1.1.15 Nie.

1.2.7 a) 1; **b)** ∞.

1.2.9 a) 0; **b)** ∞; **c)** granica nie istnieje.

1.2.10 a) granica jest równa: 0 dla $p \in \left(-3, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, 1\right)$, 1 dla $p \in \{-3, 1\}$, ∞ dla $p \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, nie istnieje dla $p \in \left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$; **b)** granica jest równa: 0 dla $p \in \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right)$, 1 dla $p \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$, ∞ dla $p \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

1.2.15 a) 1; **b)** ∞.

1.2.16 a) przyjąć $n = 2k-1$ oraz $n = 2k$; **b)** przyjąć $n = 6k$ oraz $n = 6k+1$.

1.3.5 a) -3; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{6}$; **d)** 0; **e)** 2; **f)** 1; **g)** 0; **h)** 0; **i)** 1.

1.3.6 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \pi$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi$.

1.3.11 **c*)** Wskazówka. Wykorzystać nierówność Bernoulliego; **d)** 0; **e*)** 1.

1.3.14 **a)** e^3; **b)** $\frac{1}{e}$; **c)** 1; **d)** e^2; **e)** e^{-1}; **f)** e^{-8}.

1.4.4 **a)** $-\infty$; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** 0; **e)** ∞; **f)** $-\infty$; **g*)** 1; **h*)** 0.

1.4.7 Nieoznaczoność $\infty - \infty$.

W tabeli mamy $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ oraz $a \in \boldsymbol{R}$.

x_n	n	$n+a$	$2n$	$n+(-1)^n$
y_n	$2n$	n	n	n
$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)$	$-\infty$	a	∞	nie istnieje

Nieoznaczoność 1^∞.

W tabeli mamy $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ oraz $a > 0$.

x_n	$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[n]{3+(-1)^n}$
y_n	n	n	n	n
$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}$	0	a	∞	nie istnieje

Nieoznaczoność 0^0.

W tabeli mamy $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ oraz $0 < a < 1$, $b > 1$.

x_n	$\frac{1}{n^n}$	a^n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{b^n}$	$\frac{1}{n^n}$	$\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$
y_n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$
$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}$	0	a	1	b	∞	nie istnieje

1.5.3 **a)** $\{-1,1\}$; **b)** $\{0,1\}$; **c)** $\{0,\infty\}$; **d*)** $[-1,1]$.

1.5.4 **a)** $(a_n) = (1,2,1,2,1,2,\ldots)$; **b)** $(b_n) = (0,1,0,2,0,3,\ldots)$;
c*) $(c_n) = \left(1,1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right)$;
d*) $(d_n) = (-1,0,1,-2,-1,0,1,2,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots)$.

1.5.5* Wskazówka. Pokazać, że każda liczba niewymierna byłaby także punktem skupienia tego ciągu.

1.5.7 **a)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$; **b)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = \infty$;
c) $\underline{\lim}_{n\to\infty} c_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} c_n = 1$; **d*)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} d_n = -10$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} d_n = 10$.

1.5.8* $\frac{1}{5}$.

1.6.3* **a)** $[0,1]$; **b)** $\{-2,2\}$; **c)** $\{-\infty,0,\infty\}$; **d)** $\boldsymbol{R}$; **e*)** $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; **f*)** $\boldsymbol{R}$.

2

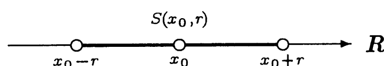
GRANICE FUNKCJI

2.1 Podstawowe określenia

● **Definicja 2.1.1** *(sąsiedztwa punktu)*

1. Sąsiedztwem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r).$$



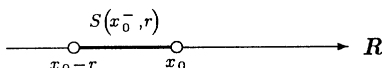
Rys. 2.1.1. Sąsiedztwo punktu.

2. Sąsiedztwem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

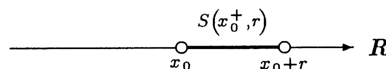
$$S\left(x_0^-, r\right) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0).$$

3. Sąsiedztwem prawostronnym o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

$$S\left(x_0^+, r\right) \stackrel{def}{=} (x_0, x_0 + r).$$



Rys. 2.1.2. Sąsiedztwo lewostronne.

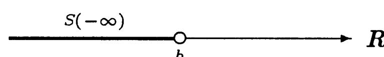


Rys. 2.1.3. Sąsiedztwo prawostronne.

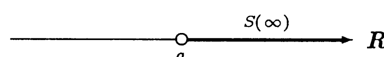
Uwaga. Jeżeli promień sąsiedztwa nie będzie istotny w rozważaniach, to zbiory $S(x_0, r)$, $S\left(x_0^-, r\right)$ oraz $S\left(x_0^+, r\right)$ będziemy oznaczali krótko przez $S(x_0)$, $S\left(x_0^-\right)$ oraz $S\left(x_0^+\right)$.

● **Definicja 2.1.2** *(sąsiedztwa nieskończoności)*

1. Sąsiedztwem $-\infty$ nazywamy zbiór $S(-\infty) \stackrel{def}{=} (-\infty, b)$, gdzie $b \in \boldsymbol{R}$.
2. Sąsiedztwem ∞ nazywamy zbiór $S(\infty) \stackrel{def}{=} (a, \infty)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.



Rys. 2.1.4. Sąsiedztwo $-\infty$.



Rys. 2.1.5. Sąsiedztwo ∞.

• **Definicja 2.1.3** *(Heinego* granicy właściwej funkcji w punkcie)*

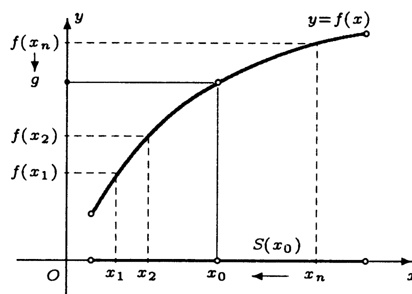
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{(x_n) \\ \{x_n\} \subset S(x_0)}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

Obrazowo: funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą g, gdy jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0 (i różnym od tego punktu) dążą do liczby g (rys. 2.1.6).



Rys. 2.1.6. Heinego granica właściwa funkcji w punkcie.

Uwaga. Analogicznie definiuje się granicę właściwą funkcji w punkcie, który jest właściwym punktem skupienia jej dziedziny. Wartość funkcji f w punkcie x_0 (o ile istnieje) nie ma wpływu na jej granicę w tym punkcie. Zamiast równości $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ można stosować także zapis $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g$ albo też $f(x) \longrightarrow g$, gdy $x \longrightarrow x_0$.

○ **Ćwiczenie 2.1.4**

Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{x \to 2} (7 - 2x) = 3$; b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+3} = \frac{1}{2}$; c) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$; d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = 2$;

e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$; f) $\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0$; g) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$; h*) $\lim_{x \to 0} e^x = 1$.

*Eduard Heinrich Heine (1821–1881), matematyk niemiecki.

● **Fakt 2.1.5** *(o nieistnieniu granicy funkcji w punkcie)*
Jeżeli istnieją ciągi (x'_n), (x''_n) spełniające warunki:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$, przy czym $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, przy czym $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$,
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nie istnieje (właściwa ani niewłaściwa).

Uwaga. Powyższy fakt jest prawdziwy także wtedy, gdy $g' = \pm\infty$ lub $g'' = \pm\infty$.

○ **Ćwiczenie 2.1.6**
Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to -2} E(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x}$.

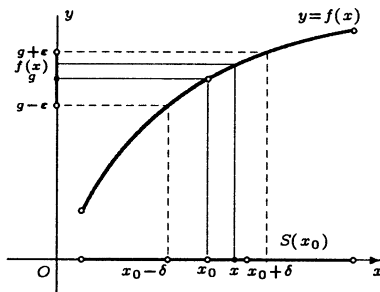
● **Definicja* 2.1.7** *(Cauchy'ego† granicy właściwej funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S(x_0)} \Big[\big(|x-x_0|<\delta\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-g|<\varepsilon\big)\Big].$$

Obrazowo: funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą g, gdy jej wartości różnią się dowolnie mało od granicy, o ile tylko jej argumenty leżą dostatecznie blisko punktu x_0 i są od niego różne (rys. 2.1.7).



Rys. 2.1.7. Cauchy'ego granica właściwa funkcji w punkcie.

†Augustin Louis Cauchy (1789–1857), matematyk francuski.

○ **Ćwiczenie* 2.1.8**

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)=-1$; b) $\lim\limits_{x\to 4} x^2=16$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x=0$.

● **Definicja 2.1.9** *(Heinego granicy lewostronnej właściwej funkcji w punkcie)*

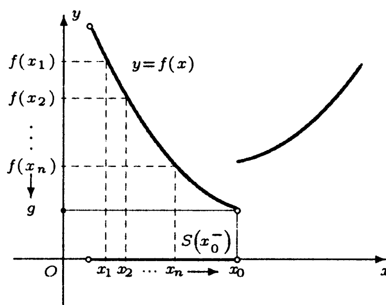
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S\left(x_0^-\right)$. Liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S\left(x_0^-\right)}} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=g\right)\right].$$

Obrazowo: liczba g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, gdy jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0, przez wartości mniejsze od x_0, dążą do liczby g (rys. 2.1.8). Zamiast równości $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g$ stosowany jest także zapis $f\left(x_0-0\right)=g$ lub $f\left(x_0^-\right)=g$.



Rys. 2.1.8. Heinego granica lewostronna właściwa funkcji w punkcie.

Uwaga. Podobnie definiuje się granicę właściwą lewostronną funkcji w punkcie, który jest lewostronnym właściwym punktem skupienia jej dziedziny. Podobnie jak w poprzednich definicjach, wartość funkcji w punkcie x_0 (o ile istnieje) nie ma wpływu na granicę lewostronną funkcji w punkcie x_0. Granicę prawostronną funkcji f w punkcie x_0 definiuje się analogicznie. Oznaczamy ją symbolem

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{lub} \quad f\left(x_0+0\right) \quad \text{albo} \quad f\left(x_0^+\right).$$

○ **Ćwiczenie 2.1.10**

Korzystając z definicji Heinego granicy jednostronnej funkcji w punkcie uzasadnić podane

równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{|x|} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{|x^4 - 1|}{x - 1} = -4$; c) $\lim\limits_{x\to 3+} E(-x) = -4$;

d) $\lim\limits_{x\to 2\pi-} \operatorname{sgn}(\sin x) = -1$; e) $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\dfrac{1^{2pt}}{x} = \dfrac{\pi}{2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

○ Ćwiczenie 2.1.11

Uzasadnić, że podane granice jednostronne funkcji nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 0-} \cos\dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0+} E\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)$.

● Definicja* 2.1.12 *(Cauchy'ego granicy lewostronnej właściwej funkcji w punkcie)*

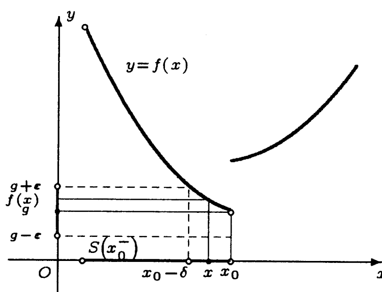
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S\left(x_0^-\right)$. Liczba g jest granicą lewostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S\left(x_0^-\right)} \left[(0 < x_0 - x < \delta) \Longrightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon\right)\right].$$

Obrazowo: liczba g jest granicą lewostronną właściwą funkcji f, gdy x dąży do punktu x_0, jeżeli jej wartości różnią się od granicy dowolnie mało, o ile argumenty leżą dostatecznie blisko (po lewej stronie) punktu x_0 (rys. 2.1.9). Definicja Cauchy'ego granicy prawostronnej właściwej funkcji w punkcie jest analogiczna.



Rys. 2.1.9. Cauchy'ego granica lewostronna właściwa funkcji w punkcie.

○ Ćwiczenie* 2.1.13

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy jednostronnej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 1+} (3x - 1) = 2$; b) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{8 - x^3}{|2 - x|} = 12$; c) $\lim\limits_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$; d) $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$.

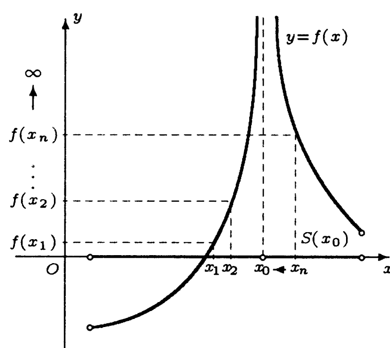
● **Definicja 2.1.14** *(Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{(x_n) \\ \{x_n\} \subset S(x_0)}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty \right) \right].$$

Obrazowo: funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞, gdy x dąży do x_0, jeżeli jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0 (i różnym od x_0), dążą do ∞ (rys. 2.1.10). Zamiast równości $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ można stosować także zapis $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$ lub też $f(x) \longrightarrow \infty$, gdy $x \longrightarrow x_0$.



Rys. 2.1.10. Heinego granica niewłaściwa funkcji w punkcie.

Uwaga. Podobnie jak poprzednio, wartość funkcji f w punkcie x_0 (o ile istnieje) nie ma wpływu na granicę niewłaściwą funkcji w tym punkcie. Definicja Heinego granicy niewłaściwej $-\infty$ funkcji w punkcie jest analogiczna do definicji podanej wyżej.

○ **Ćwiczenie 2.1.15**
Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2} = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - e^{\frac{1}{|x|}} \right) = -\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1}{\sin^2 x} = \infty$.

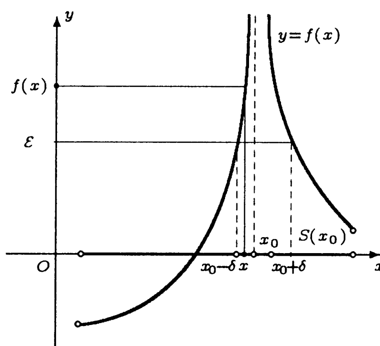
● **Definicja* 2.1.16** *(Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\mathcal{E}>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \bigwedge_{x\in S(x_0)} \Big[\big(|x-x_0|<\delta\big) \Longrightarrow \big(f(x)>\mathcal{E}\big)\Big].$$

Obrazowo: funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞, gdy x dąży do x_0, jeżeli jej wartości są dowolnie duże, o ile tylko argumenty leżą dostatecznie blisko punktu x_0 (i są od niego różne, rys. 2.1.11).



Rys. 2.1.11. Cauchy'ego granica niewłaściwa funkcji w punkcie.

Uwaga*. Definicja Cauchy'ego granicy niewłaściwej $-\infty$ funkcji w punkcie jest analogiczna do podanej wyżej.

HUMOR

Na ćwiczeniach z analizy prowadzący uzasadnił równość

$$\lim_{x\to 0}\frac{8}{x^2}=\infty.$$

W domu studenci mieli obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{x^2}$. *Jeden z nich napisał*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2}= \text{ᑌᑎ}.$$

Dlaczego?

Ćwiczenie* 2.1.17

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^4}=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|=-\infty$.

Uwaga. Wprowadza się także pojęcia granic jednostronnych niewłaściwych funkcji w punkcie. Definicje Heinego i Cauchy'ego takich granic są analogiczne do odpowiednich definicji granic jednostronnych właściwych. Do oznaczania tych granic

stosuje się symbole:

$$f\left(x_0^-\right) = \infty, \quad f\left(x_0^-\right) = -\infty, \quad f\left(x_0^+\right) = \infty, \quad f\left(x_0^+\right) = -\infty.$$

○ **Ćwiczenie 2.1.18**

Korzystając z definicji Heinego uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{\sin x} = -\infty$.

Podane niżej twierdzenie stosujemy do znajdowania granic funkcji określonych przez wartość bezwzględną albo kilkoma wzorami. Twierdzenie to można wykorzystać także do uzasadnienia, że rozważana granica nie istnieje.

● **Twierdzenie 2.1.19** *(warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)*

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

○ **Ćwiczenie 2.1.20**

Zbadać, czy istnieją podane granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sgn}\left(x^3\right)}{\operatorname{sgn}(x)}$; d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{E(-x)}{E(x)}$.

Przechodzimy teraz do zdefiniowana granic właściwych w nieskończoności. Podobnie jak poprzednio podamy dwie równoważne definicje tego pojęcia.

● **Definicja 2.1.21** *(Heinego granicy właściwej funkcji w nieskończoności)*

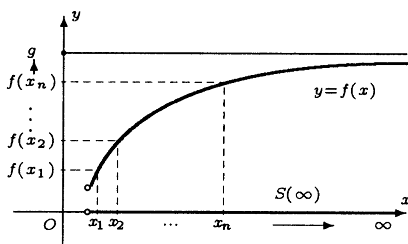
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w ∞, co zapisujemy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{(x_n) \\ \{x_n\} \subset S(\infty)}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = \infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g\right)\right].$$

Obrazowo: funkcja f ma w ∞ granicę właściwą g, jeżeli jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do ∞ dążą do granicy g (rys. 2.1.12). Zamiast równości $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ stosowany jest także zapis $f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} g$ lub $f(x) \longrightarrow g$, gdy $x \longrightarrow \infty$ albo też $f(\infty) = g$.



Rys. 2.1.12. Heinego granica właściwa funkcji w nieskończoności.

Uwaga. Definicja Heinego granicy właściwej funkcji w $-\infty$ jest podobna do poprzedniej. Analogicznie można określić granicę właściwą w nieskończoności dla funkcji, której dziedzina ma niewłaściwy punkt skupienia.

○ **Ćwiczenie 2.1.22**

Przy pomocy definicji Heinego granicy właściwej funkcji w nieskończoności uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x+2} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-3x^2}{x^2+1} = -3$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$.

● **Fakt 2.1.23** *(o nieistnieniu granicy funkcji w nieskończoności)*

Jeżeli istnieją ciągi (x'_n), (x''_n) spełniające warunki:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$,
3. $g' \neq g''$,

to nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (właściwa ani niewłaściwa).

Uwaga. Powyższy fakt jest prawdziwy także wtedy, gdy $g' = \pm\infty$ lub $g'' = \pm\infty$. Analogicznie wygląda ten fakt dla granicy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

○ **Ćwiczenie 2.1.24**

Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2 x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{2+\cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\sqrt{x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x$; e*) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x+1)}{2+\sin x}$.

● **Definicja* 2.1.25** *(Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w nieskończoności)*

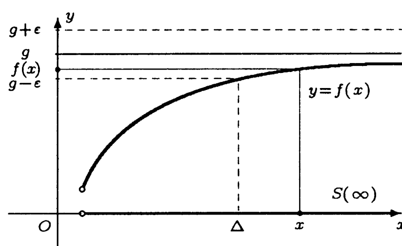
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w ∞, co zapisujemy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\Delta\in R} \bigwedge_{x\in S(\infty)} \left[(x > \Delta) \Longrightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon\right)\right].$$

Obrazowo: funkcja f ma granicę właściwą w ∞, jeżeli jej wartości różnią się od granicy dowolnie mało, o ile tylko argumenty są dostatecznie duże (rys. 2.1.13).



Rys. 2.1.13. Cauchy'ego granica właściwa funkcji w nieskończoności.

Uwaga*. Definicja Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w $-\infty$ jest podobna do podanej wyżej.

○ **Ćwiczenie* 2.1.26**

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w nieskończoności uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^x) = 1$.

Pozostały jeszcze do zdefiniowania granice niewłaściwe funkcji w nieskończoności. Są cztery typy takich granic:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Definicje Heinego i Cauchy'ego podamy tylko dla pierwszej granicy. Pozostałe definicje są analogiczne i proponujemy Czytelnikowi samodzielne ich sformułowanie.

● **Definicja 2.1.27** *(Heinego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności)*

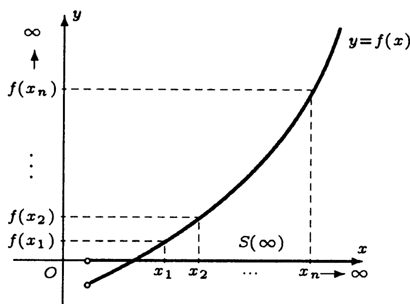
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(\infty)}} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty\right)\right].$$

Obrazowo: funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞, gdy x dąży do ∞, jeżeli jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do ∞ dążą do ∞ (rys. 2.1.14). Zamiast równości $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ stosowany jest także zapis $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ lub $f(x) \longrightarrow \infty$, gdy $x \longrightarrow \infty$ albo też $f(\infty) = \infty$.



Rys. 2.1.14. Heinego granica niewłaściwa funkcji w nieskończoności.

Uwaga. Analogicznie można określić granicę niewłaściwą w nieskończoności dla funkcji, której dziedzina ma niewłaściwy punkt skupienia.

○ **Ćwiczenie 2.1.28**

Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-x^2\right) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2}{x+1} = \infty$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x = \infty$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[4]{2-x} = \infty$.

● **Definicja* 2.1.29** *(Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności)*

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

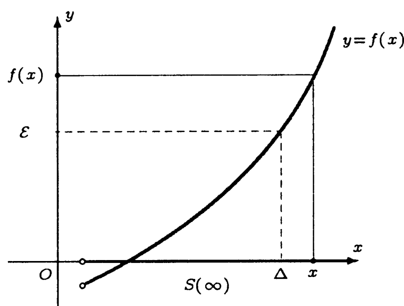
$$\bigwedge_{\mathcal{E}>0} \bigvee_{\Delta\in R} \bigwedge_{x\in S(\infty)} \left[(x > \Delta) \Longrightarrow (f(x) > \mathcal{E})\right].$$

Obrazowo: funkcja w ∞ ma granicę niewłaściwą ∞, jeżeli jej wartości są dowolnie duże, o ile tylko argumenty są dostatecznie duże (rys. 2.1.15).

○ **Ćwiczenie* 2.1.30**

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 - x^3\right) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2 \left(1 + x^2\right) = \infty$.



Rys. 2.1.15. Cauchy'ego granica niewłaściwa funkcji w nieskończoności.

○ **Ćwiczenie 2.1.31**

Narysować przykładowe wykresy funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, które spełniają jednocześnie wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$.

● **Twierdzenie* 2.1.32** *(o równoważności definicji granic funkcji)*

Odpowiadające sobie definicje Heinego i Cauchy'ego granic funkcji są równoważne.

Zestawienie definicji Heinego granic funkcji

Niech a i A oznaczają symbole podane w tabelach:

a				
x_0	x_0^-	x_0^+	$-\infty$	∞

A		
g	$-\infty$	∞

Wówczas definicje Heinego wszystkich rodzajów granic funkcji można napisać w jednolitej postaci:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ \{x_n\}\subset S(a)}} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \implies \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)\right].$$

○ **Ćwiczenie 2.1.33**

Napisać definicje Heinego podanych granic funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$; c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pi$; e) $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = -\infty$; f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$;

g) $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \pi$; h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; h) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x) = -\infty$.

2.2 Twierdzenia o granicach właściwych funkcji

● **Twierdzenie 2.2.1** *(o arytmetyce granic funkcji)*

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)+g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)-g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(cf(x)\right)=c\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$, gdzie $c\in\boldsymbol{R}$,

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$,

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$,

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Uwaga. Wzory **1.** i **4.** są prawdziwe także dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników. We wzorze **6.** zakładamy, że wyrażenia po obu stronach równości mają sens. Ponadto przyjmujemy, że $(0^+)^q=\infty$ dla $q<0$. Powyższe twierdzenia o arytmetyce granic są prawdziwe także dla granic jednostronnych funkcji w punkcie x_0 oraz dla granic w $-\infty$ lub ∞.

○ **Ćwiczenie 2.2.2**

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-2^x}{3^x-4\cdot 5^x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3}{x^3+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; g) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

○ **Ćwiczenie* 2.2.3**

Podać przykłady funkcji f i g takich, że nie istnieją granice właściwe ani niewłaściwe

$$\lim_{x\to 0} f(x),\qquad \lim_{x\to 0} g(x),$$

ale istnieją granice właściwe:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$.

■ **Twierdzenie 2.2.4** *(o granicy funkcji złożonej)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$,
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
3. $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = q$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g\left(f(x)\right) = q$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych typów granic.

○ **Ćwiczenie 2.2.5**
Korzystając z twierdzenia o granicy funkcji złożonej obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^4 - 1\right)^2$; b) $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 4}{8 - \sqrt{x}}$; c) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{\sin x}$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

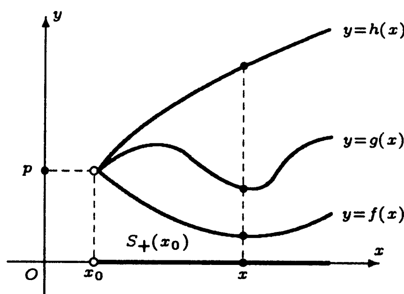
○ **Ćwiczenie 2.2.6**
a) Pokazać, że $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x^5\right) = g \iff \lim\limits_{x \to 0} f(x) = g$;
b) Podać przykład funkcji f, dla której $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x^2\right)$ istnieje, ale $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nie istnieje.

● **Twierdzenie 2.2.7** *(o trzech funkcjach)*
Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest także prawdziwe dla granic właściwych jednostronnych (rys. 2.2.1) oraz dla granic właściwych w nieskończoności.



Rys. 2.2.1. Ilustracja twierdzenia o trzech funkcjach dla granicy prawostronnej.

○ **Ćwiczenie 2.2.8**

Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{E\left(e^x\right)}{e^x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\sin^2\frac{1}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x\cos x$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[2x+1]{4^x+9^x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1} [\operatorname{sgn}(x-1)\operatorname{tg}\pi x]$;

○ **Ćwiczenie 2.2.9**

Populacja bakterii w chwili $t\geqslant 0$ jest opisana wzorem $p(t)=E\left(10^6\left(3-2^{-4t}\right)\right)$. Obliczyć graniczną liczbę bakterii w tej populacji.

● **Fakt 2.2.10** *(zamiana granicy funkcji)*

Granice funkcji w punkcie lub nieskończoności można zastąpić granicami w zerze:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} f\left(u+x_0\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 0+} f\left(\frac{1}{u}\right)$,
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 0^-} f\left(\frac{1}{u}\right)$.

○ **Ćwiczenie 2.2.11**

Korzystając ze wzorów na zamianę granic obliczyć:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]$.

2.3 Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji

■ **Twierdzenie 2.3.1** *(o dwóch funkcjach)*

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $f(x)\leqslant g(x)$ dla każdego $x\in S\left(x_0\right)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,

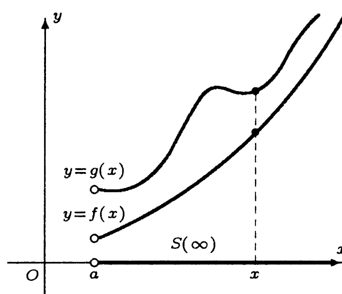
to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Uwaga. Twierdzenie o dwóch funkcjach jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w nieskończoności (rys. 2.3.1). Ponadto prawdziwe są analogiczne twierdzenia dla granicy niewłaściwej funkcji równej $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 2.3.2**

Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin x-e^x\right)=-\infty$; c) $\lim\limits_{x\to\pi} E\left(\frac{2x}{\pi}\right)\operatorname{ctg}^2 x=\infty$.



Rys. 2.3.1. Ilustracja twierdzenia o dwóch funkcjach w przypadku granicy niewłaściwej ∞ rozważanej w ∞.

- **Twierdzenie 2.3.3** *(o granicach niewłaściwych funkcji)*

$p+\infty=\infty$ dla $-\infty<p\leqslant\infty$	$p\cdot\infty=\infty$ dla $0<p\leqslant\infty$
$\frac{p}{\infty}=0$ dla $-\infty<p<\infty$	$\frac{p}{0^+}=\infty$ dla $0<p\leqslant\infty$
$p^{\infty}=0$ dla $0^+\leqslant p<1$	$p^{\infty}=\infty$ dla $1<p\leqslant\infty$
$\infty^q=0$ dla $-\infty\leqslant q<0$	$\infty^q=\infty$ dla $0<q\leqslant\infty$

Uwaga. Równości podane w tej tabelce są symboliczną formą zapisu twierdzeń o granicach funkcji. Np. równość $p^{\infty}=0$, gdzie $0^+\leqslant p<1$, jest skróconą postacią twierdzenia:

$$\left.\begin{array}{ll}1. & f(x)>0 \text{ dla każdego } x\in S(x_0)\\ 2. & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)<1,\\ 3. & \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=0.$$

Twierdzenie to jak i pozostałe, zapisane symbolicznie w tabelce, dotyczą także granic jednostronnych oraz granic w nieskończoności. Powyższa tabelka jest taka sama jak dla ciągów (**Twierdzenie 1.4.3**). Podobnie wygląda tabelka „działań" z symbolem $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 2.3.4**

Obliczyć podane granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^2-1}{x-1}+\ln\frac{1}{x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^{\ln x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{3x^2+1}\right)^{x-x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5^x-4^x-3^x-2^x\right)$; e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x^2-x^5}{1+x^3}$.

Uwaga. Podobnie jak dla ciągów, symbole:

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci funkcji je tworzących. Zilustrujemy to na przykładzie nieoznaczoności $0 \cdot \infty$. Analogiczne przykłady można podać dla pozostałych nieoznaczoności.

● **Przykład 2.3.5**

Funkcje f i g spełniają warunki:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \infty,$$

jednak granica $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ przyjmuje różne wartości albo też nie istnieje.

a) Niech $f(x) = x$ oraz $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Wtedy $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ – nie istnieje.

b) Niech $f(x) = px^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{x^2}$, gdzie $p \in \mathbf{R}$. Wtedy $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = p$.

c) Niech $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{x^4}$. Wtedy $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \infty$.

d) Niech $f(x) = -x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{x^4}$. Wtedy $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = -\infty$.

○ **Ćwiczenie 2.3.6**

Podać przykłady funkcji (dla granic w punkcie, jednostronnych, w nieskończoności) świadczące, że pozostałe wyrażenia są nieoznaczone.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, gdzie $a > 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, gdzie $0 < a \neq 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, gdzie $a \in \mathbf{R}$	$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, gdzie $a \in \mathbf{R}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}=1$

○ **Ćwiczenie 2.3.7**

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-7}\right)^{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{2x-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x^3}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\operatorname{ctg} 5x$; i) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\arcsin 2x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{3^x-2^x}$; n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}{2\cdot 7^x-7\cdot 2^x}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$;

p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; r) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$; s) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)}$;

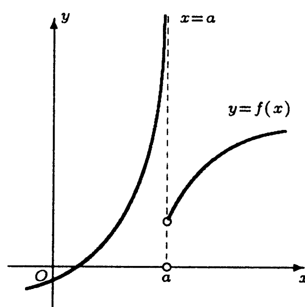
t) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}$; u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$; w) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x\operatorname{th} e^{-x}\right)$.

2.4 Asymptoty funkcji

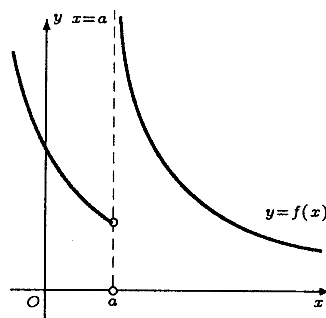
● **Definicja 2.4.1** *(asymptota pionowa lewostronna)*

Prosta $x=a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f (rys. 2.4.1), jeżeli

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \quad\text{albo}\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty.$$



Rys. 2.4.1. Asymptota pionowa lewostronna.

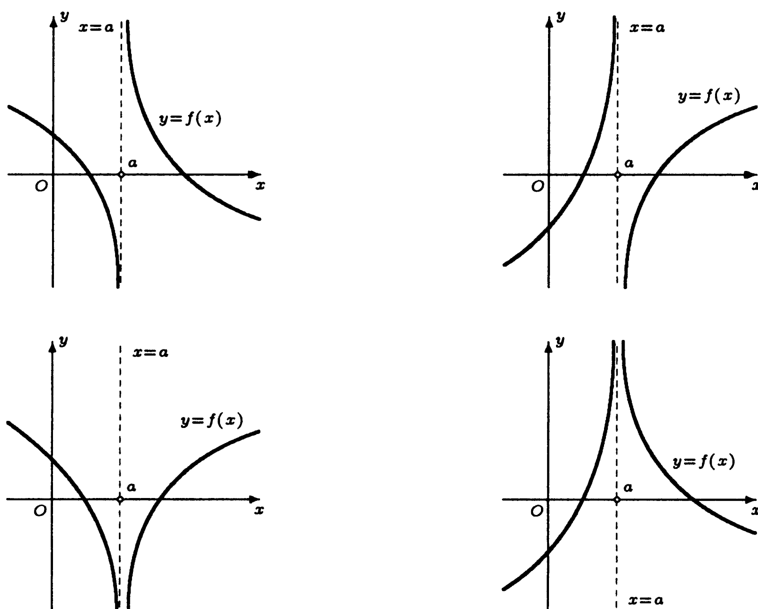


Rys. 2.4.2. Asymptota pionowa prawostronna.

Uwaga. Podobnie definiuje się asymptotę pionową prawostronną (rys. 2.4.2).

- **Definicja 2.4.2** *(asymptota pionowa obustronna)*

Prosta jest asymptotą pionową obustronną lub krótko asymptotą pionową funkcji, jeżeli jest jednocześnie jej asymptotą lewostronną i prawostronną (rys. 2.4.3).



Rys. 2.4.3. Asymptoty pionowe obustronne.

- **Fakt 2.4.3** *(o lokalizacji asymptot pionowych funkcji)*

Funkcja elementarna **może mieć** asymptoty pionowe jedynie w skończonych krańcach dziedziny, które do niej nie należą.

○ **Ćwiczenie 2.4.4**

Zbadać, czy podane proste są asymptotami pionowymi wskazanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$, $x = 0$; b) $f(x) = \ln(4-x)$, $x = 4$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x = 0$;

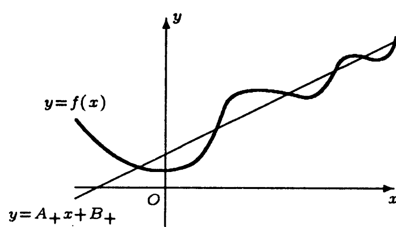
d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x-1}$, $x = 1$; e) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$, $x = \pm 2$; f) $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^x - 1}$, $x = 0$.

- **Definicja 2.4.5** *(asymptota ukośna funkcji)*

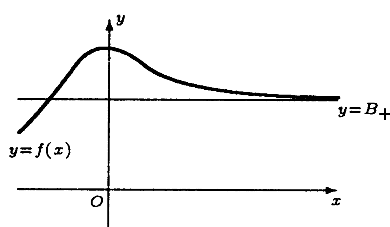
Prosta $y = A_+ x + B_+$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (A_+ x + B_+)\right] = 0.$$

Obrazowo: prosta jest asymptotą ukośną funkcji w ∞, gdy jej wykres dla argumentów leżących „blisko” ∞ praktycznie pokrywa się z tą prostą (rys. 2.4.4).



Rys. 2.4.4. Asymptota ukośna.



Rys. 2.4.5. Asymptota pozioma.

Uwaga. Podobnie definiuje się asymptotę ukośną w $-\infty$. Współczynniki tej asymptoty oznaczamy symbolami A_- i B_-. Jeżeli współczynnik $A_\pm$ jest równy 0, to asymptotę ukośną nazywamy poziomą (rys. 2.4.5). Warto podkreślić, że asymptota ukośna może przecinać wykres funkcji nieskończenie wiele razy, np. prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x) = x$ w ∞.

○ **Ćwiczenie 2.4.6**

Naszkicować wykresy funkcji $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełniających wszystkie podane warunki:

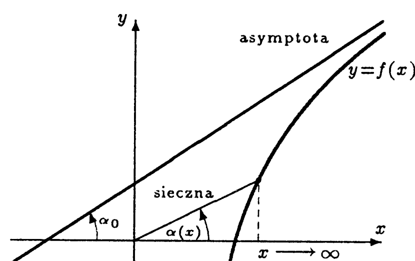
a) prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną w ∞, a prosta $y = x - 1$ jest asymptotą ukośną w $-\infty$;

b) prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą w ∞, a prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$.

■ **Fakt 2.4.7** *(warunek istnienia asymptoty ukośnej)*

Prosta $y = A_+x + B_+$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad B_+ = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - A_+x\right].$$



Rys. 2.4.6.

Uwaga. Jeżeli funkcja f ma asymptotę w ∞, to kąt $\alpha(x)$ nachylenia siecznej łączącej punkty $(0,0)$, $(x, f(x))$ dąży, gdy $x \longrightarrow \infty$, do kąta α_0 nachylenia asymptoty (rys. 2.4.6). Prawdziwe są także analogiczne wzory dla asymptot ukośnych w $-\infty$.

● **Fakt 2.4.8** *(warunek istnienia asymptot poziomych)*

Prosta $y = B_+$ jest asymptotą poziomą funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B_+.$$

Uwaga. Analogicznie wygląda warunek istnienia asymptoty poziomej w $-\infty$.

○ **Ćwiczenie 2.4.9**
Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; c) $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}$;
d) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$; e) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$; f*) $f(x) = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

○ **Ćwiczenie* 2.4.10**
Wyjaśnić dlaczego prosta $y = \frac{\pi}{2}x$ nie jest asymptotą ukośną w ∞ funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ mimo, że $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

2.5 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 2.2.4** *(o granicy funkcji złożonej)*
Korzystamy z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie. Ponieważ granice

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \text{ oraz } \lim_{y\to y_0} g(y) = q$$

są właściwe, przy czym $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$, więc mamy

$$(*) \qquad \bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(x_0)}} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0,$$

przy czym $f(x_n) \neq y_0$ dla $n \in N$ oraz

$$(**) \qquad \bigwedge_{\substack{(y_n)\\ \{y_n\}\subset S(y_0)}} y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0 \implies g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q.$$

Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(x_0)}} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \implies g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} q.$$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ oraz $\{x_n\} \subset S(x_0)$. Wtedy korzystając z $(*)$ oraz przyjmując w $(**)$ $y_n = f(x_n)$ otrzymamy $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$, przy czym $y_n \neq y_0$ dla $n \in N$. W konsekwencji tego mamy

$$g(f(x_n)) = g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q.$$

■ **Dowód Twierdzenia 2.3.1** *(o dwóch funkcjach)*
Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(x_0)}} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \implies g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ oraz niech $\{x_n\} \subset S(x_0)$. Z założenia wynika, że $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Ponieważ $g(x) \geqslant f(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$, więc także $g(x_n) \geqslant f(x_n)$ dla każdego $n \in N$. Korzystając teraz z twierdzenia o dwóch ciągach (**Twierdzenie 1.4.1**), otrzymamy $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

■ **Dowód Faktu 2.4.7** *(warunek istnienia asymptoty ukośnej)*
Pokażemy najpierw, że jeżeli prosta $y = A_+ x + B_+$ jest asymptotą funkcji f w ∞, to

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } B_+ = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - A_+ x\right).$$

Z definicji wynika, że skoro prosta $y = A_+ x + B_+$ jest asymptotą funkcji f w ∞, to

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)\right] = 0.$$

Korzystając z twierdzenia o granicy ilorazu otrzymamy z jednej strony

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)\right]}{\lim\limits_{x\to\infty} x} = \frac{0}{\infty} = 0,$$

z drugiej strony mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A_+ - \frac{B_+}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - A_+.$$

Zatem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A_+.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(f(x) - A_+ x\right) - B_+\right] = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} B_+ = B_+$, więc korzystając z twierdzenia o granicy sumy otrzymamy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - A_+ x\right) &= \lim_{x\to\infty} \left[\left(f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)\right) + B_+\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)\right] + \lim_{x\to\infty} B_+ = 0 + B_+ = B_+. \end{aligned}$$

Przechodzimy teraz do wykazania, że jeżeli istnieją skończone granice

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A_+ \text{ oraz } \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - A_+ x\right) = B_+,$$

to prosta $y = A_+ x + B_+$ jest asymptotą funkcji f w ∞. Ponieważ liczba A_+ jest skończona, więc z równości

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) + A_+ x\right) = B_+, \text{ gdzie } \left|B_+\right| < \infty,$$

wynika równość

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \left(A_+ x + B_+\right)\right] = 0.$$

2.6 Odpowiedzi i wskazówki

2.1.6 Rozważyć ciągi (x'_n), (x''_n) : **a)** $x'_n = 1-\frac{1}{n}$, $x''_n = 1+\frac{1}{n}$; **b)** $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x''_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$; **c)** $x'_n = -2-\frac{1}{2n}$, $x''_n = -2+\frac{1}{2n}$; **d)** $x'_n = -\frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{1}{n}$; **e)** $x'_n = e^{\frac{1}{n}}$, $x''_n = e^{-\frac{1}{n}}$

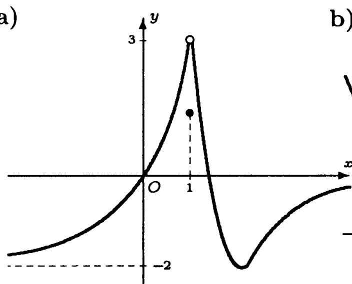
2.1.11 Rozważyć ciągi (x'_n), (x''_n) : **a)** $x'_n=\frac{-1}{2n\pi}$, $x''_n=\frac{-1}{(2n+1)\pi}$; **b)** $x'_n=\frac{1}{2n-1}$, $x''_n=\frac{1}{2n}$; **c)** $x'_n = \frac{2}{\pi+4n\pi}$, $x''_n = \frac{2}{3\pi+4n\pi}$; **d)** $x'_n = \frac{4}{(4n-1)\pi}$, $x''_n = \frac{4}{(4n+1)\pi}$.

2.1.20 **a)** 0; **b)** nie istnieje; **c)** 1; **d)** nie istnieje.

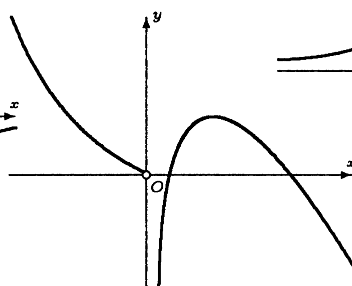
2.1.24 Rozważyć ciągi (x'_n), (x''_n), gdzie: **a)** $x'_n = n\pi$, $x''_n = 2n\pi+\frac{\pi}{2}$; **b)** $x'_n = -2n\pi$, $x''_n = -2n\pi+\frac{\pi}{2}$; **c)** $x'_n = (2n\pi)^2$, $x''_n = (2n\pi+\pi)^2$; **d)** $x'_n = -n\pi$, $x''_n = -n\pi+\frac{\pi}{4}$; **e*)** $x'_n = 2n\pi$, $x''_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$.

2.1.31

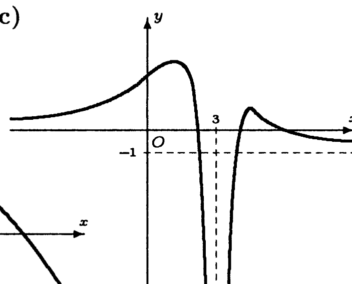
a)



b)



c)



2.2.2 **a)** $\frac{3}{5}$; **b)** -1; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** 1; **e)** $\frac{3}{5}$; **f)** $\frac{1}{4}$; **g)** 0; **h)** $\frac{1}{2}$.

2.2.3* **a)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = -\sin\frac{1}{x}$; **b)** $f(x) = 2+\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}}$; **c)** $f(x) = g(x) = 2+\sin\frac{1}{x}$; **d)** $f(x) = (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$, $g(x) = 2^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

2.2.5 **a)** 0; **b)** $-\frac{1}{3}$; **c)** $-\infty$; **d)** 1; **e)** $\frac{\pi}{2}$.

2.2.6 **b)** $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

2.2.8 **a)** 0; **b)** 1; **c)** 0; **d)** 0; **e)** 3; **f)** 0.

2.2.9 $3\cdot 10^6 - 1$.

2.2.11 **a)** $\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** $\frac{2}{\pi}$.

2.3.4 **a)** ∞; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** ∞; **e)** ∞; **f)** $-\infty$.

2.3.6 Dla wyrażenia $\boxed{\infty-\infty}$, jeżeli $f(x) = g(x) = x$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)] = 0$, ale jeżeli $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

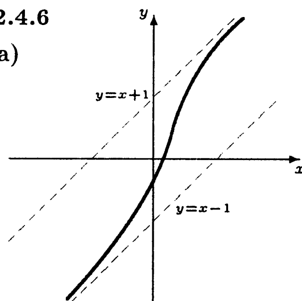
oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\infty$. Dla wyrażenia $\boxed{\frac{0}{0}}$, jeżeli $f(x)=g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, ale jeżeli $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Dla wyrażenia $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$, jeżeli $f(x)=g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, ale jeżeli $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$. Dla wyrażenia $\boxed{1^\infty}$, jeżeli $f(x)\equiv 1$, $g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=1$, ale jeżeli $f(x)=1+\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=e$. Dla wyrażenia $\boxed{\infty^0}$, jeżeli $f(x)=x$, $g(x)\equiv 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=1$, ale jeżeli $f(x)=x^x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, to $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=\infty$. Dla wyrażenia $\boxed{0^0}$, jeżeli $f(x)\equiv 0$, $g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0+}[f(x)]^{g(x)}=0$, ale jeżeli $f(x)=g(x)=x$, to $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0+}[f(x)]^{g(x)}=1$.

2.3.7 a) $\frac{7}{5}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\ln\frac{3}{2}$; **d)** $e^{-\frac{2}{3}}$; **e)** e^{12}; **f)** 1; **g)** -2; **h)** $\frac{3}{5}$; **i)** ∞; **j)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **k*)** $-\frac{1}{2}$; **l)** $\frac{3}{2}$; **m)** $\frac{\ln 7-\ln 5}{\ln 3-\ln 2}$; **n)** $\frac{15\ln 3-\ln 5}{14\ln 7-\ln 2}$; **o)** 1; **p)** $\frac{5}{3}$; **r)** $-\frac{2}{7}$; **s)** $-\frac{1}{3}$; **t)** 0; **u)** 1; **w)** 1.

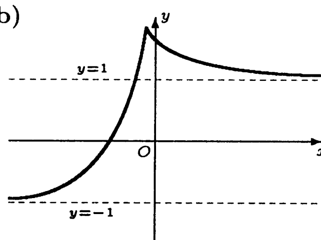
2.4.4 a) nie; **b)** tak, lewostronna; **c)** tak, prawostronna; **d)** nie; **e)** $x=2$ nie, $x=-2$, tak, prawostronna; **f)** nie.

2.4.6

a)



b)



2.4.9 a) asymptota pionowa obustronna $x=1$, asymptota pozioma $y=1$ w $-\infty$ i ∞; **b)** asymptot pionowych brak, asymptoty ukośne $y=x$ w ∞ oraz $y=-x$ w $-\infty$; **c)** asymptota pionowa obustronna $x=2$, asymptota ukośna $y=x$ w $-\infty$ i ∞; **d)** asymptota pionowa obustronna $x=0$, asymptota pozioma $y=0$ w $-\infty$ i ∞; **e)** asymptot pionowych brak, asymptoty ukośne $y=\frac{2}{\pi}x+\frac{4}{\pi^2}$ w ∞ oraz $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{4}{\pi^2}$ w $-\infty$; **f*)** asymptota pionowa lewostronna $x=-\frac{1}{e}$, asymptota ukośna $y=x+\frac{1}{e}$ w $-\infty$ oraz ∞.

3

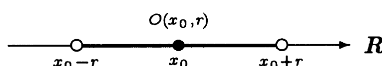
FUNKCJE CIĄGŁE

3.1 Ciągłość funkcji

• **Definicja 3.1.1** *(otoczenia punktu)*

1. Otoczeniem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

$$O(x_0, r) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0 + r).$$



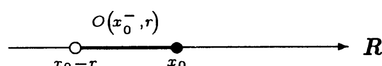
Rys. 4.1.1. Otoczenie punktu.

2. Otoczeniem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

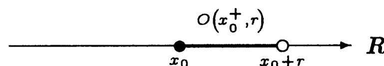
$$O\left(x_0^-, r\right) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0].$$

3. Otoczeniem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nazywamy zbiór

$$O\left(x_0^+, r\right) \stackrel{def}{=} [x_0, x_0 + r).$$



Rys. 4.1.2. Otoczenie lewostronne.



Rys. 4.1.3. Otoczenie prawostronne.

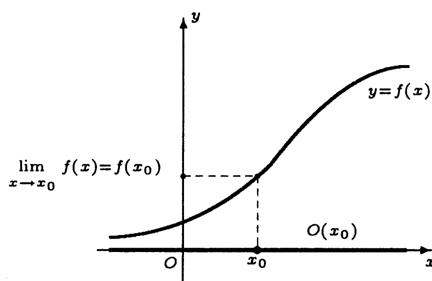
Uwaga. Jeżeli promień otoczenia nie będzie istotny w rozważaniach, to zbiory $O(x_0, r)$, $O\left(x_0^-, r\right)$ oraz $O\left(x_0^+, r\right)$ będziemy oznaczali krótko przez $O(x_0)$, $O\left(x_0^-\right)$ oraz $O\left(x_0^+\right)$.

• **Definicja 3.1.2** *(funkcja ciągła w punkcie)*

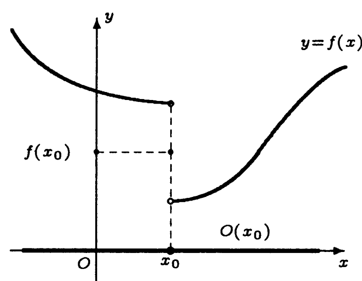
Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Obrazowo: funkcja jest ciągła w punkcie, gdy jej wykres nie „przerywa" się w tym punkcie.



Rys. 3.1.4. Funkcja ciągła w punkcie.



Rys. 3.1.5. Funkcja nieciągła w punkcie.

Uwaga. Analogicznie można zdefiniować ciągłość funkcji w punkcie skupienia jej dziedziny. Przyjmuje się, że w punktach izolowanych dziedziny funkcja jest ciągła.

○ Ćwiczenie 3.1.3

Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 1-2x+3x^2$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^3}$, $x_0 = 0$; c*) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; e*) $f(x) = e^x$, $x_0 = -1$; f*) $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $x_0 = 0$.

○ Ćwiczenie* 3.1.4

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x-3$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = x^2+1$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$.

● Definicja 3.1.5 *(funkcja lewostronnie ciągła w punkcie)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O\left(x_0^-\right)$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

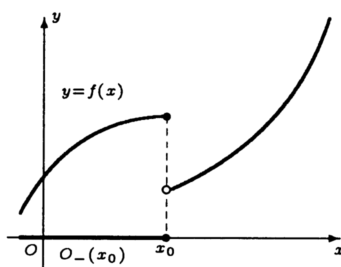
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f\left(x_0\right).$$

Uwaga. Podobnie definiuje się funkcję prawostronnie ciągłą w punkcie. Analogicznie można zdefiniować ciągłość jednostronną funkcji w punkcie dziedziny, który jest jej jednostronnym punktem skupienia.

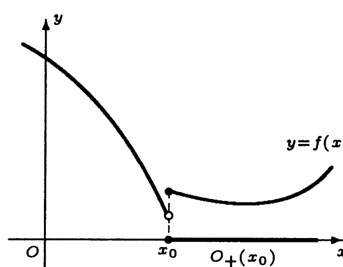
○ Ćwiczenie 3.1.6

Zbadać lewostronną i prawostronną ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach oraz naszkicować ich wykresy:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1, \\ -2 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$ $x_0 = 0$.



Rys. 3.1.6. Funkcja lewostronnie ciągła w punkcie.



Rys. 3.1.7. Funkcja prawostronnie ciągła w punkcie.

- **Twierdzenie 3.1.7** *(warunek konieczny i wystarczający ciągłości funkcji)*

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie.

○ **Ćwiczenie 3.1.8**

Zbadać ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ x^2 & \text{dla } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 2, \\ 2x & \text{dla } x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$.

○ **Ćwiczenie 3.1.9**

Dobrać parametry $a, b \in \boldsymbol{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{ax} & \text{dla } x < 0, \\ x+b & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leqslant 1, \\ x^2+ax+b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

○ **Ćwiczenie 3.1.10**

Siła $F(x) = \left|\vec{F}(x)\right|$ przyciągania masy punktowej m przez jednorodną kulę wydrążoną o masie M, promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R wyraża się wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant x < r, \\ \dfrac{GmM\left(x^3-r^3\right)}{\left(R^3-r^3\right)x^2} & \text{dla } r \leqslant x < R, \\ \dfrac{GmM}{x^2} & \text{dla } R \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

gdzie x oznacza odległość masy m od środka kuli, a G jest stałą grawitacji. Zbadać, czy funkcja F jest ciągła w punktach $x = r$, $x = R$.

- **Definicja 3.1.11** *(funkcja ciągła na zbiorze)*

Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Uwaga. Obrazowo: funkcja jest ciągła **na przedziale**, gdy jej wykres można narysować bez odrywania ręki od rysunku. Funkcja f jest ciągła na zbiorze A, jeżeli zachowuje zbieżność ciągów o wyrazach z tego zbioru, tzn., gdy z warunku $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ wynika, że $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, gdzie $x_0,\ x_n \in A$. Dla funkcji ciągłych można zatem zamienić symbol granicy z symbolem funkcji, tzn.

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Ciągłość funkcji na przedziale domkniętym $[a,b]$ oznacza jej ciągłość w każdym punkcie przedziału otwartego (a,b) oraz prawostronną ciągłość w punkcie a i lewostronną ciągłość w punkcie b.

○ **Ćwiczenie 3.1.12**

Uzasadnić ciągłość podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[-1,1]$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $(1,\infty)$;

c) $f(x) = \sin x$, $\boldsymbol{R}$; d) $f(x) = e^x$, $\boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie* 3.1.13**

Podać przykład funkcji $f: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, która jest ciągła tylko:

a) w punkcie 0; b) w punktach 0 i 1;

c) w punktach $p \in \boldsymbol{Z}$; d) w punktach $a \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$;

e) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

3.2 Nieciągłości funkcji

● **Definicja 3.2.1** *(nieciągłość funkcji)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ albo, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Uwaga. Nieciągłość funkcji można badać jedynie w punktach należących do jej dziedziny.

● **Definicja 3.2.2** *(nieciągłości pierwszego rodzaju)*

Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją granice skończone $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

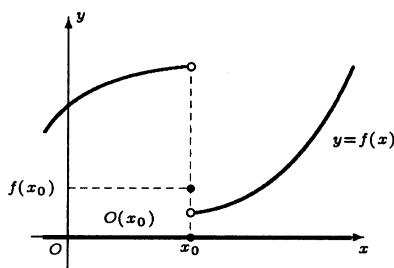
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu „skok" (rys. 3.2.1), jeżeli spełnia warunek

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

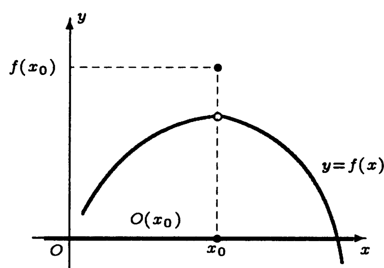
Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0),$$

to mówimy, że ma ona w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu „luka" (rys. 3.2.2).



Rys. 3.2.1. Nieciągłość typu „skok".



Rys. 3.2.2. Nieciągłość typu „luka".

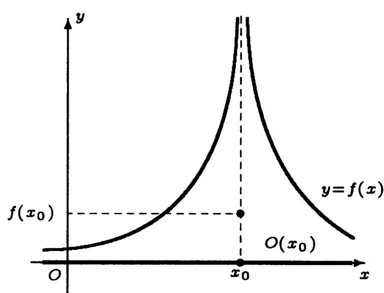
● **Definicja 3.2.3** *(nieciągłość drugiego rodzaju)*

Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, jeżeli co najmniej jedna z granic

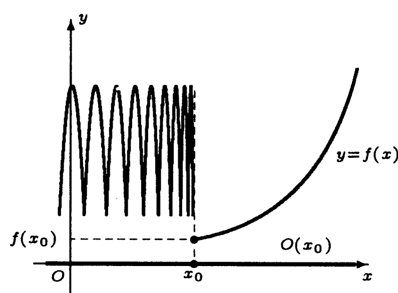
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Uwaga. Rozważa się także nieciągłości jednostronne funkcji.



Rys. 3.2.3. Nieciągłość drugiego rodzaju (granice jednostronne są niewłaściwe).



Rys. 3.2.4. Nieciągłość drugiego rodzaju (granica lewostronna nie istnieje).

○ **Ćwiczenie 3.2.4**

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\dfrac{1}{x} & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} |x| E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

3.3 Działania na funkcjach ciągłych

• **Twierdzenie 3.3.1** *(o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)*

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to:

1. funkcja $f+g$ jest ciągła w punkcie x_0;

2. funkcja $f-g$ jest ciągła w punkcie x_0;

3. funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0;

4. funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla funkcji ciągłych jednostronnie. Stwierdzenia podane w punktach **1.** i **3.** są prawdziwe także dla większej liczby odpowiednio składników i czynników,

• **Twierdzenie 3.3.2** *(o ciągłości funkcji złożonej)*

Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,

to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest ciągła jednostronnie, a funkcja g jest ciągła, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła jednostronnie. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla większej liczby złożeń.

○ **Ćwiczenie 3.3.3**

Uzasadnić, że podane funkcję są ciągłe we wskazanych punktach:

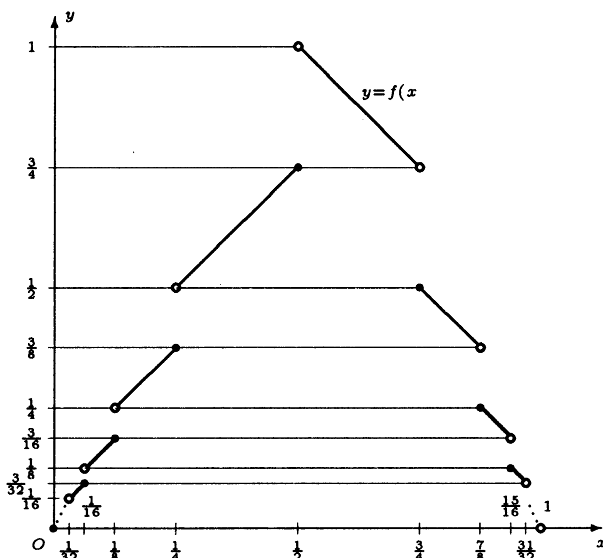
a) $f(x) = \sin^2 x,\ x_0 \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = \ln|x|,\ x_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x}},\ x_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, 1\}$; d) $f(x) = \cos 3^{\sqrt{\operatorname{tg} x}},\ x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

• **Twierdzenie 3.3.4** *(o ciągłości funkcji odwrotnej)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca na przedziale $[a, b]$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca na przedziale $[f(a), f(b)]$.

Uwaga. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji malejącej. Powyższe twiedzenie nie ma wersji lokalnej, gdyż istnieje funkcja różnowartościowa $f : (-1, 1) \xrightarrow{na} (-1, 1)$ spełniająca warunek $f(0) = 0$, która jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Jednakże funkcja odwrotna do niej nie jest ciągła w punkcie $y_0 = 0$. Wykres tej funkcji przedstawiono na rys. 3.3.1, przy czym dla $-1 < x < 0$ funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -f(-x)$.



Rys. 3.3.1 Wykres funkcji ciągłej w punkcie takiej, że funkcja odwrotna do niej nie jest ciągła.

○ **Ćwiczenie 3.3.5**

Uzasadnić, że podane funkcje są ciągłe na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[1, \infty)$; b) $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $\boldsymbol{R}$; c) $h(x) = \arcsin 2x$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

● **Twierdzenie 3.3.6** *(o ciągłości funkcji elementarnych)*

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

● **Twierdzenie* 3.3.7** *(o monotoniczności funkcji ciągłej i różnowartościowej)*

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Wówczas funkcja f jest różnowartościowa na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest malejąca albo rosnąca na tym przedziale.

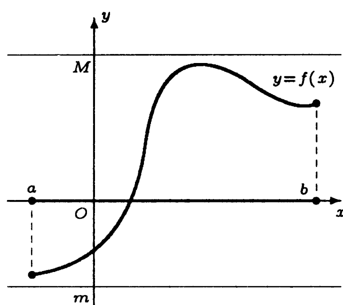
3.4 Twierdzenia o funkcjach ciągłych

■ **Twierdzenie 3.4.1** *(Weierstrassa* o ograniczoności funkcji ciągłej)*

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.

---

*Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897), matematyk niemiecki.



Rys. 3.4.1. Ilustracja twierdzenia Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej.

Uwaga. Założenie domkniętości przedziału jest istotne, bo np. funkcja $f(x) = \operatorname{ctg} x$ jest ciągła na przedziale $(0, \pi)$, ale nie jest na nim ograniczona. Także założenie ograniczoności przedziału jest istotne, gdyż np. funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na przedziale $[0, \infty)$, ale nie jest na nim ograniczona. Podobnie założenie ciągłości funkcji jest istotne, bo np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \boldsymbol{Q}, \\ \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \notin \boldsymbol{Q} \end{cases}$$

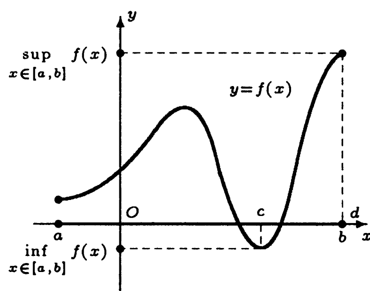
nie jest ograniczona na przedziale domkniętym $[-1, 1]$.

● **Twierdzenie 3.4.2** *(Weierstrassa o osiąganiu kresów)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to

$$\bigvee_{c \in [a,b]} f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{oraz} \quad \bigvee_{d \in [a,b]} f(d) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Uwaga. Założenie domkniętości przedziału jest istotne, bo np. funkcja $f(x) = x$ nie osiąga swoich kresów na przedziale $(0, 1)$. Także założenie ograniczoności przedziału jest istotne, gdyż np. funkcja $f(x) = x \sin x$ nie osiąga swoich kresów na przedziale $[0, \infty)$.



Rys. 3.4.2. Ilustracja twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą.

○ **Ćwiczenie 3.4.3**

Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów uzasadnić, że:

a) wśród trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje ten o największym polu;

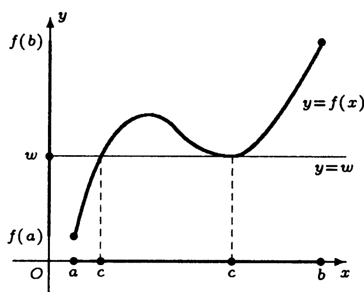
b) wśród graniastosłupów prawidłowych o podstawie kwadratowej wpisanych w stożek, o promieniu podstawy R i wysokości H, istnieje ten o największej objętości;

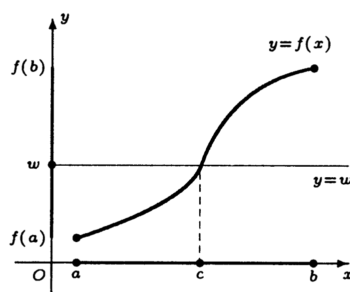
c*) dowolny wielomian stopnia parzystego przyjmuje wartość najmniejszą na $\mathbb{R}$.

● **Twierdzenie 3.4.4** *(Darboux*[†] *o przyjmowaniu wartości pośrednich)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\bigwedge_{w\in(f(a),f(b))} \bigvee_{c\in(a,b)} f(c) = w.$$





Rys. 3.4.3. Ilustracje do twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich.

Obrazowo: każda prosta $y = w$, gdzie $f(a) < w < f(b)$, przecina wykres funkcji f co najmniej raz.

Uwaga. Jeżeli w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że funkcja f jest rosnąca, to punkt c określony będzie jednoznacznie (rys. 3.4.3). Analogiczne twierdzenie jest także prawdziwe dla przypadku $f(a) > f(b)$.

○ **Ćwiczenie 3.4.5**

Uzasadnić, że podane funkcje przyjmują określone wartości na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sin x + \cos x,\ w = \frac{1}{3},\ [0, \pi]$; b) $f(x) = 2^x - x^2,\ w = \frac{1}{10},\ [1, 3]$.

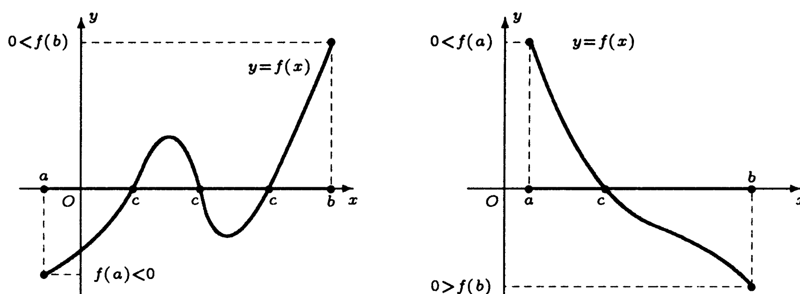
■ **Twierdzenie 3.4.6** *(Darboux o miejscach zerowych funkcji)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Uwaga. Jeżeli funkcja w powyższym twierdzeniu jest dodatkowo malejąca albo rosnąca, to punkt c jest określony jednoznacznie (rys. 3.4.4). Twierdzenie to można

[†] Jean Gaston Darboux (1842–1917), matematyk francuski.

stosować do wyznaczania miejsc zerowych funkcji z dowolną dokładnością.



Rys. 3.4.4. Ilustracje do twierdzenia Darboux o miejscach zerowych funkcji.

○ **Ćwiczenie 3.4.7**

Narysować wykres funkcji ciągłej na $[0,1]$, spełniającej warunek $f(0)f(1) < 0$ i takiej, że równanie $f(x) = 0$ ma:

a) tylko trzy rozwiązania;
b) tylko dwa rozwiąznia;
c) nieskończenie wiele rozwiązań.

○ **Ćwiczenie 3.4.8**

Uzasadnić, że podane równania mają jedno rozwiązanie we wskazanych przedziałach:

a) $x^4 = 4^x$, $(-\infty, 0]$; b) $\ln x = 2 - x$, $[1,2]$; c) $x^4 + x - 1 = 0$, $(0, \infty)$.

Znaleźć przybliżone rozwiązania tych równań z błędem nie większym niż 0.25.

○ **Ćwiczenie* 3.4.9**

Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że:

a) każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty;
b) istnieje płaszczyzna połowiąca jednocześnie objętości dwóch dowolnych wielościanów;
c) istnieje prosta połowiąca jednocześnie obwód i pole dowolnego wielokąta wypukłego;
d) na obwodnicy miejskiej w kształcie okręgu istnieją dwa przeciwległe punkty, które są położone na tej samej wysokości.

3.5 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 3.4.1** *(Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej)*

Przypuśćmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, ale nie jest na nim ograniczona. Istnieje wtedy ciąg (x_n) liczb z przedziału $[a,b]$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \text{ albo } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że zachodzi pierwsza możliwość. Ponieważ ciąg (x_n) jest ograniczony, więc z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (**Twierdzenie 1.5.1**) wynika, że istnieje podciąg zbieżny tego ciągu. Aby nie komplikować zapisu, niech (x_n) będzie tym podciągiem oraz niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, gdzie $x_0 \in [a,b]$. Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0

mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Z drugiej strony $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$

■ **Dowód Twierdzenia 3.4.6** *(Darboux o miejscach zerowych funkcji)*
W kolejnych krokach dowodu skonstruujemy ciąg przedziałów $[l_1, p_1], [l_2, p_2], [l_3, p_3], \ldots$, na końcach których funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków.
Niech $l_1 = a$, $p_1 = b$ oraz niech s_1 będzie środkiem przedziału $[l_1, p_1]$. Wtedy możliwe są przypadki:

$$f(s_1) = 0, \qquad f(s_1) < 0, \qquad f(s_1) > 0.$$

Jeżeli zachodzi pierwszy przypadek, to dowód jest zakończony. Jeżeli nie, to niech $[l_2, p_2]$ będzie tym spośród przedziałów $[l_1, s_1]$, $[s_1, p_1]$, na końcach którego funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków.
W kolejnym kroku niech s_2 oznacza środek przedziału $[l_2, p_2]$. Jak powyżej możliwe są przypadki:

$$f(s_2) = 0, \qquad f(s_2) < 0, \qquad f(s_2) > 0.$$

W pierwszym przypadku dowód jest zakończony. Jeżeli nie zachodzi pierwszy przypadek, to niech $[l_3, p_3]$ oznacza ten z przedziałów $[l_2, s_2]$, $[s_2, p_2]$, na końcach którego funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków.

Powtarzając tę procedurę nieskończenie wiele razy, jeżeli wcześniej dowód się nie zakończył, otrzymamy ciąg przedziałów $[l_n, p_n] \subset [a, b]$, gdzie $n \in N$, na końcach których funkcja f spełnia warunek $f(l_n) \cdot f(p_n) < 0$. Zauważmy, że ciąg lewych końców skonstruowanych przedziałów, tj. ciąg (l_n) jest niemalejący. Natomiast ciąg prawych końców otrzymanych przedziałów, tj. ciag (p_n) jest nierosnący. Ponadto ciągi (l_n) i (p_n) są ograniczone, przy czym ciąg (l_n) z góry (np. przez liczbę b), a ciąg (p_n) z dołu (np. przez liczbę a). Zatem z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym (**Twierdzenie 1.3.9**) wynika, że są one zbieżne. Oznaczmy odpowiednio granice tych ciągów przez l i p. Pokażemy, że $l = p$. Równość ta wynika z faktu, że długość przedziału $[l_n, p_n]$, która jest równa $\frac{b-a}{2^{n-1}}$, dąży do 0, gdy $n \to \infty$.

W ostatniej części dowodu uzasadnimy, że poszukiwane miejsce zerowe funkcji f, to $c = l = p$. Rzeczywiście mamy

$$f(l_n) \cdot f(p_n) < 0 \text{ dla każdego } n \in N \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} l_n = c = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła w punkcie c, więc $\lim_{n\to\infty} [f(l_n) \cdot f(p_n)] \leqslant 0$. Stąd $f^2(c) \leqslant 0$. Zatem $f(c) = 0$.

3.6 Odpowiedzi i wskazówki

3.1.6 a) funkcja f jest ciągła lewostronnie; b) funkcja f jest ciągła prawostronnie.

3.1.8 a) funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$; b) funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

3.1.9 a) $ab = 1$; b) $a = 1$, $b = -1$.

3.1.10 Funkcja F jest ciągła w obu punktach.

3.1.13* a) $f(x) = xD(x)$, gdzie D oznacza funkcję Dirichleta (**Definicja 0.12.6**);

b) $f(x) = x(x-1)D(x)$; c) $f(x) = D(x)\sin \pi x$; d) $f(x) = R(x)$, gdzie R oznacza funkcję Riemanna (**Definicja 0.12.7**); e) $f(x) = D(x)$.

3.2.4 a) nieciągłość pierwszego rodzaju typu „luka"; b) nieciągłość drugiego rodzaju; c) nieciągłość pierwszego rodzaju typu „skok"; d) nieciągłość pierwszego rodzaju typu „skok".

3.4.7 a) $f(x) = (4x-1)(2x-1)(4x-3)$; b) $f(x) = (3x-1)^2(3x-2)$; c) $f(x) = (3x-1)(3x-2)E(3x-1)$.

3.4.8 a) -0.75; b) 1.50; c) 0.75.

3.4.9 c*) Wskazówka. Pokazać najpierw, że w dowolnym kierunku istnieje prosta połowiąca pole wielokąta. Następnie rozważyć różnicę obwodów otrzymanych części wielokąta.

4

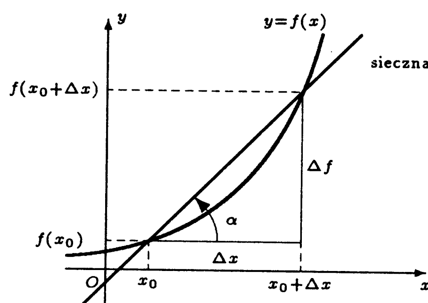
POCHODNE FUNKCJI

4.1 Podstawowe pojęcia

• **Definicja 4.1.1** *(iloraz różnicowy)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$, gdzie $r > 0$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx, gdzie $0 < |\Delta x| < r$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{def}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Rys. 4.1.1. Wielkości występujące w definicji ilorazu różnicowego.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest tangensem kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ do dodatniej części osi Ox (rys. 4.1.1);

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

○ **Ćwiczenie 4.1.2**

Obliczyć ilorazy różnicowe funkcji we wskazanych punktach odpowiadające podanym przyrostom:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,1$; b) $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,9$.

- **Definicja 4.1.3** *(pochodna właściwa funkcji)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Uwaga. Inaczej mówiąc pochodna funkcji f jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, gdy $\Delta x \to 0$. Mamy zatem

$$f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Do oznaczania pochodnej funkcji f w punkcie x_0 stosowane są także symbole

$$\frac{df}{dx}(x_0), \qquad Df(x_0).$$

○ **Ćwiczenie 4.1.4**

Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = \sin x$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 \in (0, \infty)$;

d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 \neq 1$; f*) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x_0 \neq 0$.

○ **Ćwiczenie 4.1.5**

Sprawdzić, czy podane funkcje mają pochodne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x - 3|$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \sin^3 \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$;

e*) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; f*) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

○ **Ćwiczenie* 4.1.6**

a) Pokazać, że jeżeli istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$;

b) Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0 oraz spełnia warunek

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Czy prawdą jest, że $f'(0) = 1$?

○ **Ćwiczenie 4.1.7**

Podać przykład funkcji określonej na $\boldsymbol{R}$, która:

a) nie ma pochodnej tylko w punktach $x = n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$;

b*) ma pochodną tylko w punkcie $x = 0$;

c*) ma pochodną tylko w punktach $x = p$, gdzie $p \in \boldsymbol{Z}$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarych

Wzór	Zakres zmienności
$(c)' = 0$	$c \in \boldsymbol{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \boldsymbol{N}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$(x^p)' = px^{p-1}$	$p \in \{-1, -2, -3, \ldots\}$ oraz $x \neq 0$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}^*$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$	$x \neq k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

* Zakres zmiennej x jest ustalany w zależności od parametru α.

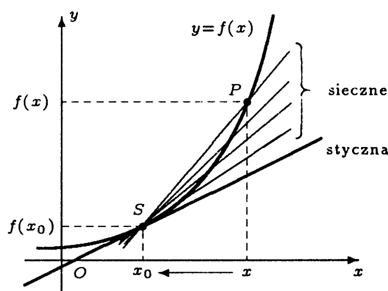
HUMOR

W szpitalu dla psychicznie chorych panuje duże zamieszanie, wszyscy pacjenci gdzieś uciekają. Tylko jeden chory siedzi spokojnie na ławce. Podbiega do niego kolega i krzyczy „uciekaj, bo przyjechali lekarze i wszystkich różniczkują”. Na to ten spokojnie odpowiada „nie boję się, jestem e^x”.

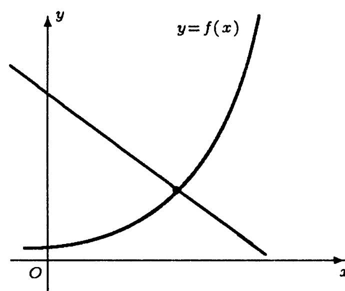
● **Definicja 4.1.8** *(styczna do wykresu funkcji)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja ciągła f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \longrightarrow x_0$.

Geometrycznie styczna jest prostą, która w sąsiedztwie punktu styczności „najlepiej” przybliża wykres funkcji (rys. 4.1.2). Nie jest prawdą, że każda prosta która ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji jest do niego styczna (rys. 4.1.3).



Rys. 4.1.2. Styczna do wykresu funkcji.

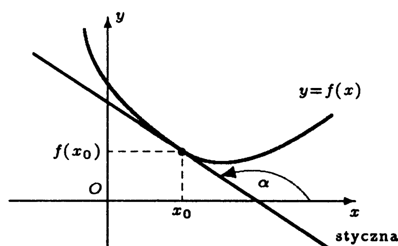


Rys. 4.1.3. Prosta ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji, ale nie jest do niego styczna.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią częścią osi Ox (rys. 4.1.4). Wtedy

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$



Rys. 4.1.4. Interpretacja geometryczna pochodnej.

● **Fakt 4.1.9** *(równanie stycznej do wykresu funkcji)*

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

○ **Ćwiczenie 4.1.10**

Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = e^x$, $(0, 1)$; b) $f(x) = \sin x$, $(\pi, 0)$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $(8, 2)$.

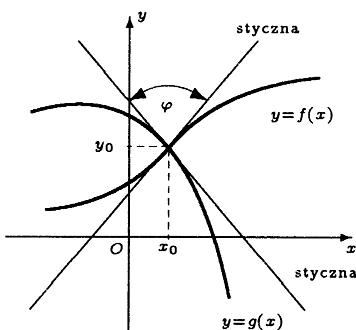
○ **Ćwiczenie 4.1.11**

a) Dane są punkty $A = (2, -1)$ oraz $B = (4, 3)$. Na wykresie funkcji $y = x^2 + 1$ znaleźć punkt C taki, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze;

b*) Wykres funkcji $y = x^3$ obrócono o kąt $\frac{\pi}{2001}$ wokół początku układu. Czy otrzymana krzywa jest wykresem pewnej funkcji w tym samym układzie współrzędnych?

● **Definicja 4.1.12** *(kąt przecięcia wykresów funkcji)*

Niech wykresy funkcji f i g mają punkt wspólny (x_0, y_0), przy czym obie funkcje mają pochodne właściwe w punkcie x_0. Kątem przecięcia wykresów funkcji f i g nazywamy kąt ostry φ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie ich przecięcia.



Rys. 4.1.5. Kąt przecięcia wykresów funkcji.

● **Fakt 4.1.13** *(o mierze kąta między wykresami funkcji)*

Miara kąta przecięcia wykresów funkcji f i g wyraża się wzorem

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\, g'(x_0)} \right|,$$

gdzie x_0 jest rzędną punktu przecięcia wykresów. Jeżeli $f'(x_0)\, g'(x_0) = -1$, to przyjmujemy, że $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

○ **Ćwiczenie 4.1.14**

a) Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

i) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$; ii) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$;

b) Z działa położonego na wzgórzu o wysokości $H = 180$ m wystrzelono poziomo pocisk z szybkością $v = 1200$ m/sek. Obliczyć tangens kąta, pod jakim pocisk uderzy w ziemię. Nie uwzględniać oporu powietrza, przyjąć $g = 10\,\text{m/sek}^2$.

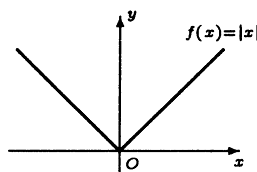
■ **Twierdzenie 4.1.15** *(warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji)*

Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale $f'(0)$ nie istnieje (rys. 4.1.6).

Notka historyczna. W XIX wieku znaleziono funkcje ciągłe na $\mathbb{R}$, które w żadnym punkcie prostej nie mają pochodnej. Taką funkcją jest np.:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(10^n x) - 10^n x}{10^n}.$$



Rys. 4.1.6. Wykres funkcji ciągłej w punkcie, która nie ma tam pochodnej.

○ **Ćwiczenie 4.1.16**

Korzystając z powyższego twierdzenia pokazać, że podane funkcje nie mają pochodnych we wskazanych punktach:

a) $f(x) = E(x)$, $x_0 = 4$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 5)$, $x_0 = 5$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 2 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

○ **Ćwiczenie 4.1.17** *(interpretacje fizyczne ilorazu różnicowego i pochodnej)*

a) Niech $S(t)$ oznacza położenie na osi punktu materialnego w chwili t. Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ oraz pochodnej $S'(t_0)$.

b) Niech $v(t)$ oznacza szybkość punktu materialnego w chwili t. Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ oraz pochodnej $v'(t_0)$.

c) Niech $Q(t)$ oznacza ilość ładunków, jaka w przedziale czasowym $[0, t]$ przepłynęła przez ustalony przekrój przewodnika. Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ oraz pochodnej $Q'(t_0)$.

○ **Ćwiczenie 4.1.18**

Zbadać, czy podanym równościom można nadać iterpretację geometryczną:

a) $\dfrac{d}{dr}\left(\pi r^2\right) = 2\pi r$; b) $\dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2$.

4.2 Pochodne jednostronne funkcji

• **Definicja 4.2.1** *(pochodne jednostronne właściwe funkcji)*

Niech $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O\left(x_0^-\right)$. Pochodną lewostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-\left(x_0\right) \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$$

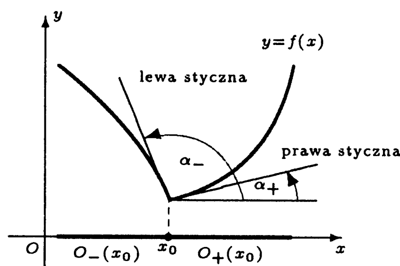
Analogicznie definiuje się pochodną prawostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0. Pochodną taką oznaczamy przez $f'_+\left(x_0\right)$.

Uwaga. Jeżeli funkcja ma w punkcie pochodną lewostronną (prawostronną) właściwą, to jest w nim ciągła lewostronnie (prawostronnie).

Interpretacja geometryczna pochodnych jednostronnych

Niech α_+ i α_- oznaczają odpowiednio kąty nachylenia prawej i lewej stycznej wykresu funkcji do dodatniej części osi Ox (rys. 4.2.1). Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha_+ = f'_+\left(x_0\right), \qquad \operatorname{tg} \alpha_- = f'_-\left(x_0\right).$$



Rys. 4.2.1. Interpretacja geometryczna pochodnych jednostronnych.

○ **Ćwiczenie 4.2.2**

Obliczyć pochodne jednostronne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x|^3$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1, \\ 2 - x & \text{dla} \quad x < 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

• **Twierdzenie 4.2.3** *(warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej)*

Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-\left(x_0\right) = f'_+\left(x_0\right).$$

Jeżeli pochodne jednostronne są równe, to ich wspólna wartość jest pochodną.

○ **Ćwiczenie 4.2.4**

Zbadać istnienie pochodnych podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \left|\sin^3 x\right|$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = |x - \pi| \sin x$, $x_0 = \pi$;

c) $f(x) = xE(x)$, $x_0 = -1$; d) $f(x) = \max\left\{x^2, x + 2\right\}$, $x_0 = 2$.

○ **Ćwiczenie* 4.2.5**

a) Funkcja f jest parzysta oraz ma pochodną w punkcie 0. Pokazać, że $f'(0) = 0$;

b) Podać przykład ciągłej funkcji nieparzystej, która nie ma pochodnej w 0.

● **Definicja 4.2.6** *(pochodna funkcji na zbiorze)*

Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną właściwą w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną na zbiorze, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji f na zbiorze i oznaczamy przez f'.

Uwaga 1. Pochodną funkcji na przedziale domkniętym $[a, b]$ nazywamy pochodną właściwą w każdym punkcie przedziału otwartego (a, b) oraz pochodną lewostronną właściwą w punkcie b i prawostronną właściwą w a. O funkcji, która ma pochodną właściwą w każdym punkcie zbioru, mówimy, że jest różniczkowalna na nim.

Uwaga 2. Pochodna funkcji na zbiorze nie musi być ciągła. Np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma pochodną na $\boldsymbol{R}$ wyrażoną wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Pochodna ta nie jest ciągła w punkcie 0. Można pokazać, że pochodna funkcji może mieć jedynie ciągłości drugiego rodzaju.

○ **Ćwiczenie 4.2.7**

Zbadać istnienie pochodnych podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $[-3, 2]$; b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $[-1, 1]$; c*) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^4 x}$, $\boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 4.2.8**

Znaleźć wszystkie parametry a i b, dla których podane funkcje mają pochodne na $\boldsymbol{R}$:

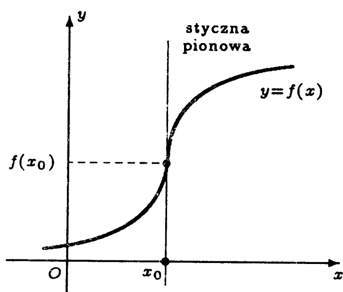
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax + b & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} a \sin x & \text{dla} \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x + b & \text{dla} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

● **Definicja 4.2.9** *(pochodna niewłaściwa funkcji)*

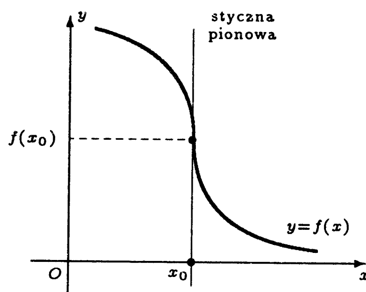
Niech f będzie funkcją **ciągłą** w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty.$$

Fakt, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą ∞ lub $-\infty$ zapisujemy w postaci $f'(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$.



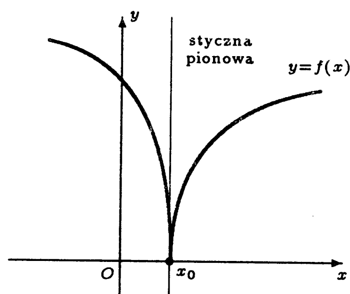
Rys. 4.2.2. Funkcja f spełnia warunek $f'(x_0) = \infty$.



Rys. 4.2.3. Funkcja f spełnia warunek $f'(x_0) = -\infty$.

Uwaga. W podobny sposób definiuje się pochodne niewłaściwe jednostronne. Pochodne te oznacza się tym samym symbolem co pochodne jednostronne właściwe:

$$f'_-(x_0) = -\infty, \quad f'_-(x_0) = \infty, \quad f'_+(x_0) = -\infty, \quad f'_+(x_0) = \infty.$$



Rys. 4.2.4. Funkcja f spełnia warunki $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = \infty$.

○ **Ćwiczenie 4.2.10**

Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-2)$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 0$.

4.3 Twierdzenia o pochodnej funkcji

■ **Twierdzenie 4.3.1** *(o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji)*
Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie $c \in \boldsymbol{R}$;
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$;
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Uwaga. Powyższe wzory są prawdziwe także dla pochodnych jednostronnych oraz dla pochodnych niewłaściwych (stosujemy wtedy reguły działań z symbolami ∞ i $-\infty$). Ponadto wzory podane w punktach **1.** i **4.** są prawdziwe również dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników.

○ **Ćwiczenie 4.3.2**
Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $h(x) = x^4 + 3x^2 - \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$, $x > 0$; b) $h(x) = \sin x \operatorname{ctg} x$, $x \neq k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

c) $h(x) = \dfrac{e^x + \sin x}{e^x + 4}$, $x \in \boldsymbol{R}$; d) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 4.3.3**
Wyprowadzić wzór na pochodną iloczynu $n \geqslant 3$ funkcji mających pochodne właściwe.

● **Twierdzenie 4.3.4** *(o pochodnej funkcji złożonej)*
Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0,
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0).$$

Uwaga. Prawdziwy jest także analogiczny wzór dla dowolnej liczby składanych funkcji oraz dla pochodnych jednostronnych, a także dla pochodnych niewłaściwych.

○ **Ćwiczenie 4.3.5**
Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $h(x) = \sin^2 x$; b) $h(x) = \left(3x^2 + 1\right)^3$; c) $h(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$;

d) $h(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^4$; e) $h(x) = \operatorname{tg}\left(x + x^5\right)$; f) $h(x) = \dfrac{1}{\cos(\sin x)}$.

○ **Ćwiczenie 4.3.6**
Podać wzór na pochodną złożenia $n \geqslant 3$ funkcji mających pochodne właściwe.

○ **Ćwiczenie 4.3.7**
Pokazać, że pochodna funkcji:

a) parzystej jest funkcją nieparzystą;
b) nieparzystej jest funkcją parzystą;
c) okresowej jest funkcją okresową.

Korzystając z powyższych własności obliczyć:

i) $f'(-4)$, jeżeli f jest parzysta i $f'(4) = -3$;
ii) $f'(0)$, jeżeli f jest parzysta i ma pochodną w 0;
iii) $f'(3)$, jeżeli f jest nieparzysta i $f'(-3) = 2$;
iv) $g'(5)$, jeżeli $g(x) = x - f(x)$, a f jest funkcją o okresie $T = 2$ taką, że $f'(-1) = 4$;
v) $f'(5)$, jeżeli f jest funkcją nieparzystą o okresie $T = 4$ taką, że $f'(3) = -1$.

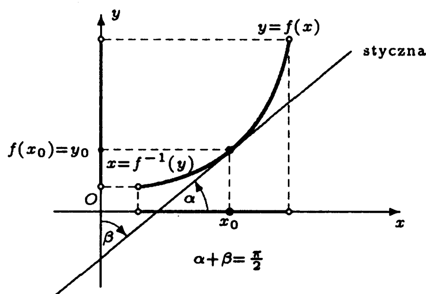
● **Twierdzenie 4.3.8** *(o pochodnej funkcji odwrotnej)*
Jeżeli funkcja f spełnia następujące warunki:

1. jest ciągła na otoczeniu $O(x_0)$,
2. jest malejąca albo rosnąca na otoczeniu $O(x_0)$,
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$,

to

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie } y_0 = f(x_0).$$

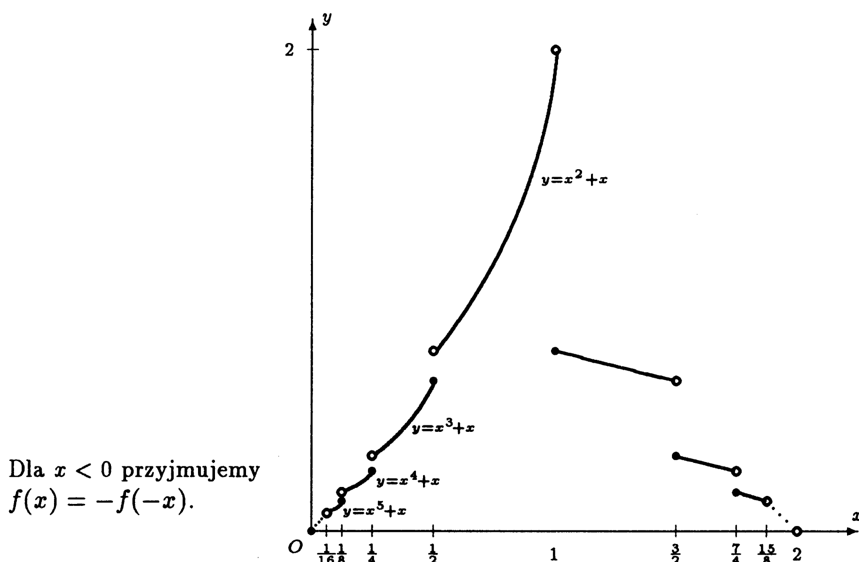
Uwaga 1. Wzór ten jest prawdziwy także dla pochodnych niewłaściwych i dla pochodnych jednostronnych.



Rys. 4.3.1. Ilustracja twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej.

Uwaga 2. W twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej nie można zrezygnować z założeń **1.** i **2.** zastępując je tylko różnowartościowością funkcji, gdyż np. funkcja $f : (-2,2) \xrightarrow{na} (-2,2)$ przedstawiona na rys. 4.3.2 jest różnowartościowa oraz

spełnia warunki: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Jednakże funkcja odwrotna do niej nie ma pochodnej w punkcie 0, gdyż jest tam nieciągła.



Ryś. 4.3.2.

○ Ćwiczenie 4.3.9

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne funkcji:

a) $g(x) = \arccos x,\ -1 < x < 1$; b) $g(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \boldsymbol{R}$;

c) $g(x) = \ln x,\ x > 0$; d) $g(x) = \sqrt{x},\ x > 0$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych–ciąg dalszy

Wzór	Zakres zmienności
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$0 < a \neq 1$ oraz $x > 0$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$

Uwaga. Do obliczania pochodnych funkcji złożonych f^g oraz $\log_f g$ stosujemy wzory:

$f^g = e^{g \ln f}$	$\log_f g = \frac{\ln g}{\ln f}$

○ **Ćwiczenie 4.3.10**

Korzystając z podanych wyżej wzorów obliczyć pochodne wskazanych funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$; b) $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{1+\cos x^2}$; c) $f(x) = \ln\left(\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg} x\right)$;

d) $f(x) = e^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}}$; e) $f(x) = \cos^4 x \cos 5x$; f) $f(x) = x^{\sin x}$;

g) $f(x) = \log_x 7$; h) $f(x) = x^{x^2}$; i) $f(x) = 2^{x \sin x}$.

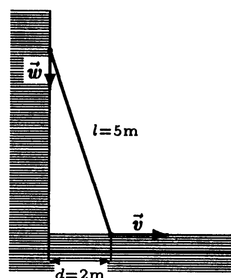
● **Fakt 4.3.11** *(o pochodnych funkcji elementarnych)*

Pochodne funkcji elementarnych są funkcjami elementarnymi.

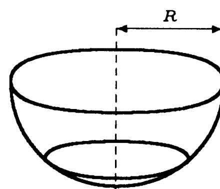
○ **Ćwiczenie 4.3.12**

a) Ropa z uszkodzonego tankowca wycieka ze stałą prędkością $V = 10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ i tworzy plamę kołową o grubości $d = 2\,\mathrm{mm}$. Obliczyć, z jaką prędkością będzie powiększała się średnica plamy ropy w chwili, gdy będzie miała średnicę $D = 1000\,\mathrm{m}$.

b) Drabina o wysokości $l = 5\,\mathrm{m}$ stoi pionowo przy ścianie. Podstawa drabiny jest odsuwana od ściany z prędkością $v = 10\,\mathrm{cm/s}$. Obliczyć, z jaką prędkością będzie się opuszczał wierzchołek drabiny w chwili, gdy podstawa będzie w odległości $d = 3\,\mathrm{m}$ od ściany;



c) Do czaszy w kształcie półkuli o promieniu $R = 20\,\mathrm{cm}$ wlewa się jednostajnie woda z prędkością $V = 100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sek}$. Obliczyć prędkość, z jaką będzie się podnosił poziom wody w czaszy na początku i pod koniec napełniania.

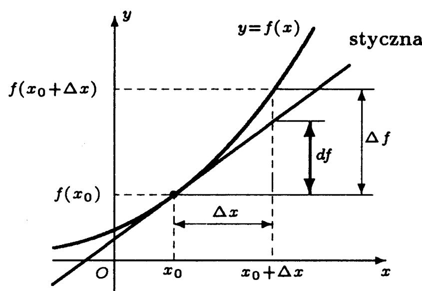


4.4 Różniczka funkcji

● **Definicja 4.4.1** *(różniczka funkcji)*

Niech funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) \stackrel{def}{=} f'(x_0)\,\Delta x.$$



Rys. 4.4.1. Różniczka funkcji.

HUMOR

Na pytanie egzaminatora: „Co to jest różniczka?”
Student odpowiedział – „To wynik odejmowanka”.

● **Fakt 4.4.2** *(zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych)*
Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\,\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej niezależnej Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

○ **Ćwiczenie 4.4.3**
Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:
a) $\sqrt[4]{15.96}$; b) $\operatorname{arctg} 1.05$; c) $\cos 0.03$; d) $e^{-0.001}$; e) $\ln 1.004$; f) $\frac{1}{0.9996^3}$.
Porównać otrzymane wyniki z wartościami uzyskanymi za pomocą kalkulatora.

○ **Ćwiczenie 4.4.4**
a) Koło ma średnicę $D = 4$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole koła, jeżeli jego średnicę zwiększymy o 3 cm.
b) Sześcienna kostka lodu ma objętość $V = 8\,\mathrm{cm}^3$. Obliczyć w przybliżeniu, o ile zmniejszyła się krawędź kostki, jeżeli stopiło się $0.3\,\mathrm{cm}^3$ lodu.
c) Metalowa kula ma średnicę $D = 2$ m. Po ogrzaniu kula zwiększyła swoją objętość o 27 cm^3. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć w przybliżeniu, o ile powiększyło się pole powierzchni kuli.

- **Fakt 4.4.5** *(zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów)*

Niech wielkości fizyczne x i y będą związane zależnością $y = f(x)$, przy czym pochodna $f'(x_0)$, gdzie x_0 jest wynikiem pomiaru wielkości x, jest właściwa. Ponadto niech Δ_x oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości x. Wtedy błąd bezwzględny Δ_y obliczanej wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym

$$\Delta_y \approx |f'(x_0)| \Delta_x.$$

○ **Ćwiczenie 4.4.6**

a) Krawędź sześcianu, zmierzona z dokładnością $\pm$ 1 mm, ma długość 65 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?

b) Czas w biegu na 100 m mierzy się z dokładnością 0.01 sek. Zawodnik uzyskał czas 10,00 sek. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość tego zawodnika?

c) Parametr $p = 1.00$ w równaniu $x^2 + 2px - 15p = 0$ jest znany z dokładnością 0.01. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można podać pierwiastek $x_1 = 3$ tego równania?

4.5 Pochodne wyższych rzędów

- **Definicja 4.5.1** *(pochodna właściwa n-tego rzędu funkcji)*

Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie:

$$f^{(n)}(x_0) \overset{def}{=} \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0) \text{ dla } n \geqslant 2,$$

gdzie $f^{(1)}(x_0) \overset{def}{=} f'(x_0)$. Ponadto przyjmujemy $f^{(0)}(x_0) \overset{def}{=} f(x_0)$.
Funkcję określoną na zbiorze, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f^{(n)}(x)$, nazywamy pochodną n-tego rzędu funkcji f na tym zbiorze i oznaczamy przez $f^{(n)}$. Piszemy także f'', f''', f^{iv} zamiast odpowiednio $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$. W fizyce stosuje się oznaczenia $\dot{f}$, $\ddot{f}$ zamiast odpowiednio f', f''.

Uwaga. Dla istnienia n-tej pochodnej funkcji f w punkcie x_0 konieczne jest istnienie pochodnej $f^{(n-1)}$ (i co za tym idzie także wszystkich poprzednich pochodnych) na pewnym otoczeniu punktu x_0. Do oznaczania pochodnej n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 stosuje się także symbole $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$, $D^n f(x_0)$, a do oznaczania tej pochodnej na zbiorze symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$, $D^n f$.

○ **Ćwiczenie 4.5.2**

Obliczyć pochodne f', f'', f''' podanych funkcji:

a) $f(x) = e^{x^2}$; b) $f(x) = x \ln x$; c) $f(x) = \sin^3 x$; d) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

○ **Ćwiczenie 4.5.3**

Zbadać, czy istnieje $f''(x_0)$ dla podanych funkcji i punktów:

a) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{dla } x<0,\\ x^2 & \text{dla } x\geqslant 0,\end{cases}$ $x_0=0$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0,\end{cases}$ $x_0=0$;

c) $f(x)=\begin{cases}2x^3 & \text{dla } x<0,\\ \sin^4 x & \text{dla } x\geqslant 0,\end{cases}$ $x_0=0$; d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-x^2} & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{dla } x>1,\end{cases}$ $x_0=1$.

○ **Ćwiczenie* 4.5.4**

Zbadać, czy istnieje $f'''(0)$ dla podanych funkcji:

a) $f(x)=|x|^5$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{dla } x<0,\\ x^2\sin x & \text{dla } x\geqslant 0.\end{cases}$

○ **Ćwiczenie* 4.5.5**

Pokazać, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

spełnia dla każdego $n\in\boldsymbol{N}$ warunek $f^{(n)}(0)=0$.

○ **Ćwiczenie* 4.5.6**

a) Znaleźć funkcję f, która dla $0\leqslant k\leqslant 2000$ spełnia równości

$$f^{(k)}(0)=k;$$

b) Podać przykład funkcji określonej na $\boldsymbol{R}$, która ma w punkcie 0 sto początkowych pochodnych, ale już 101 pochodna tam nie istnieje.

○ **Ćwiczenie 4.5.7**

Znaleźć wzory ogólne na pochodną n-tego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\cos x$; c) $f(x)=e^{-3x}$;

d*) $f(x)=\sin x\cos 3x$; e*) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; f*) $f(x)=e^x\cos x$;

g*) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; h*) $f(x)=xe^{2x}\cos 3x$; i) $f(x)=xe^x$.

■ **Twierdzenie* 4.5.8** *(wzór Leibniza*)*

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot g^{(k)}(x_0).$$

○ **Ćwiczenie 4.5.9**

Zastosować wzór Leibniza do znalezienia n–tych pochodnych podanych funkcji:

a) $h(x)=xe^x$; b) $h(x)=e^x\sin x$; c) $p(x)=\frac{\cos 2x}{e^x}$; d) $q(x)=x\ln x$.

---

*Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), matematyk niemiecki.

Pochodne wyższych rzędów ważniejszych funkcji

Wzór	Zakres zmienności
$(e^x)^{(n)} = e^x$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$x \in \boldsymbol{R}$
$(x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$	$n \leqslant m$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$
$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$x > 0$

○ **Ćwiczenie* 4.5.10**
Znaleźć wzór na drugą pochodną funkcji odwrotnej.

○ **Ćwiczenie* 4.5.11**
Wyprowadzić wzory na podane pochodne funkcji złożonych:
a) $(f \circ g)''$; b) $(f \circ g)'''$.

● **Definicja 4.5.12** *(pochodna funkcji wektorowej)*
Niech $\vec{r}(t) \stackrel{def}{=} \Big(x(t), y(t)\Big)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$, będzie funkcją wektorową. Pochodną funkcji $\vec{r}$ w punkcie t określamy wzorem:

$$\vec{r}\,'(t) \stackrel{def}{=} \Big(x'(t), y'(t)\Big).$$

Podobnie określamy pochodną funkcji wektorowej $\vec{r}(t) \stackrel{def}{=} \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, a także pochodne wyższych rzędów takich funkcji.

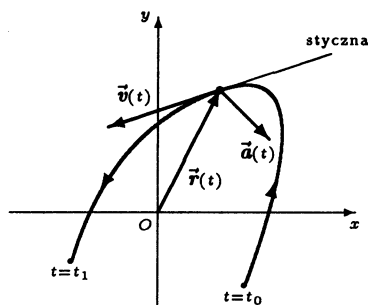
Interpretacja fizyczna pochodnej funkcji wektorowej

Niech $\vec{r}(t)$ oznacza wektor wodzący punktu materialnego w chwili $t \in [t_0, t_1]$. Wówczas prędkość tego punktu w chwili t wyraża się wzorem

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t),$$

a przyspieszenie wzorem

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t).$$



Rys. 4.5.1. Wektory prędkości i przyspieszenia.

Uwaga. W każdej chwili wektor prędkości jest styczny do trajektorii punktu, a dla ruchu ze stałą szybkością ($|\vec{v}(t)| = \text{const}$) wektor przyspieszenia jest prostopadły do tej trajektorii (zobacz rys. 4.5.1).

○ **Ćwiczenie 4.5.13**
Obliczyć wektory prędkości i przyspieszenia punktu materialnego, którego wektor wodzący w chwili t ma postać:

a) $\vec{r}(t) = \left(t+1, t^2\right)$, gdzie $t \in \mathbf{R}$; b) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

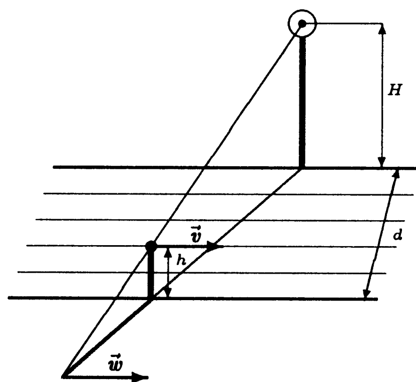
Narysować krzywe, po których porusza się ten punkt.

○ **Ćwiczenie 4.5.14**
a) W pewnym układzie współrzędnych wektor wodzący samolotu w chwili $t \geqslant 0$ ma postać

$$\vec{r} = (10\cos t, 10\sin t, 3t).$$

Obliczyć prędkość, z jaką oddala się ten samolot od początku układu w chwili, gdy będzie on na wysokości $z = 12$;

b) Latarnia ma wysokość $H = 6$ m i stoi w odległości $d = 3$ m od krawężnika (rys.). Przechodzień o wzroście $h = 2$ m idzie po krawężniku z prędkością $v = 2$ m/s. Obliczyć prędkość, z jaką będzie się poruszał koniec cienia tego przechodnia w chwili, gdy będzie on mijał latarnię.



4.6 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 4.1.15** *(warunek konieczny istnienia pochodnej funkcji)*
Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą. Istnieje wtedy granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Mamy pokazać, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Równoważnie pokażemy, że

$$\lim_{x\to x_0} \Big[f(x) - f(x_0)\Big] = 0.$$

Rzeczywiście mamy

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

■ **Dowód Twierdzenia 4.3.1** *(o pochodnej ilorazu funkcji)*
Niech $g(x_0)\neq 0$ oraz niech funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0. Wtedy mamy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\,g(x)g(x_0)}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x)}{g(x)g(x_0)}$$
$$\overset{\bullet}{=} \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{g(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$$
$$\overset{*}{=} \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

W miejscu oznaczonym gwiazdką (∗) korzystaliśmy z istnienia pochodnych funkcji f i g w punkcie x_0 oraz z ciągłości obu funkcji w tym punkcie. Wcześniej (•) korzystaliśmy z faktu mówiącego, że funkcja ciągła w punkcie x_0 i przyjmująca w tym punkcie wartość różną od 0 również w każdym punkcie pewnego sąsiedztwa tego punktu ma wartości różne od zera.

■ **Dowód Twierdzenia* 4.5.1** *(wzór Leibniza)*
Dowód wzoru Leibniza przeprowadzimy przy pomocy indukcji matematycznej. Dla $n=1$ wzór ten jest prawdziwy. Mamy bowiem

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0) = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0).$$

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby n. Mamy zatem

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot g^{(k)}(x_0).$$

Pokażemy, że wzór ten jest prawdziwy także dla liczby $n+1$. Różniczkując obie strony ostatniej równości otrzymamy

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}\left[f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right]'(x_0)\right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(n+1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0)+f^{(n-k)}(x_0)\,g^{(k+1)}(x_0)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}\left[f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right]'(x_0)\right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(n+1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0)+f^{(n-k)}(x_0)\,g^{(k+1)}(x_0)\right]$$
$$= f^{(n+1)}(x_0)\,g(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]f^{(n+1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0)+g^{(n+1)}(x_0)\,f(x_0)$$
$$= f^{(n+1)}(x_0)\,g(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0)+g^{(n+1)}(x_0)\,f(x_0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0).$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór Leibniza jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n.

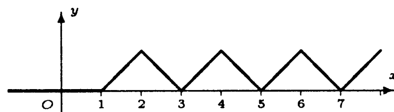
4.7 Odpowiedzi i wskazówki

4.1.2 a) $\dfrac{(-1+0.1)^2-(-1)^2}{0.1}=-1,9$; **b)** $\dfrac{\log(1-0.9)-\log 1}{-0.9}=\dfrac{10}{9}$.

4.1.5 a), b) nie; **c)** $f'(0)=0$; **d)** $f'(0)=1$; **e*)** $f'(0)=0$; **f*)** $f'(0)=0$.

4.1.6 b*) Nie.

4.1.7 a) Zobacz wykres.



b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in Q \\ 0 & \text{dla } x\notin Q\end{cases}$; **c)** $f(x)=\begin{cases} \sin^2\pi x & \text{dla } x\in Q \\ 0 & \text{dla } x\notin Q\end{cases}$.

4.1.10 a) $y=x+1$; **b)** $y=\pi-x$; **c)** $y=\dfrac{x}{12}+\dfrac{4}{3}$.

4.1.11 a) $C=(1,2)$; **b)** nie.

4.1.14 a) $\operatorname{arctg}\dfrac{\ln 2}{1+2(\ln 2)^2}$; **b)** w punkcie $(0,0)$ kąt przecięcia $\varphi=0$, w punkcie $(1,1)$ kąt przecięcia $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$; **c)** 0.05.

4.1.17 a) $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - prędkość średnia punktu, $S'(t_0)$ - prędkość chwilowa punktu w chwili t_0, **b)** $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ - przyspieszenie średnie punktu, $v'(t_0)$ - przyspieszenie chwilowe punktu w chwili t_0, **c)** $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ - natężenie średnie prądu, $Q'(t_0)$ - natężenie chwilowe prądu w chwili t_0.

4.2.2 a) $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=0$; **b)** $f'_-(1)=-1$, $f'_+(1)=4$.

4.2.4 a) $f'(0)=0$; **b)** $f'(\pi)=0$; **c)** $f'(-1)$ nie istnieje; **d)** $f'(2)$ nie istnieje.

4.2.5* b) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{dla } x\neq 0, \\ 0 & \text{dla } x=0.\end{cases}$

4.2.7 a) nie istnieje w punkcie $x_0=0$; **b)** nie istnieje w punktach $x_1=-1$, $x_2=1$;

c*) istnieje na $\boldsymbol{R}$.

4.2.8 a) $a = 2$, $b = -1$; b) $b = a + 1$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.;

4.2.10 a) tak; b) nie; c) nie; d) tak.

4.3.2 a) $4x^3 + 6x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $-\sin x$; c) $\frac{e^x(4 + \cos x - \sin x) + 4\cos x}{(e^x + 4)^2}$;
d) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

4.3.3 $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)]' = [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] \left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right)$.

4.3.5 a) $\sin 2x$; b) $18x\left(3x^2+1\right)^2$; c) $-\frac{e^{\cos\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$; d) $\frac{16x\left(x^2-1\right)^2}{(x^2+1)^6}$;
e) $\frac{1+5x^4}{\cos^2(x+x^5)}$; f) $\frac{\sin(\sin x)\cos x}{\cos^2(\sin x)}$.

4.3.6 $[f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_n]'(x) =$
$f_1'[(f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_n)(x)] \cdot f_2'[(f_3 \circ \ldots \circ f_n)(x)] \cdot \ldots \cdot f_{n-1}'[f_n(x)] \cdot f_n'(x)$.

4.3.7 i) $f'(-4) = 3$; ii) $f'(0) = 0$; iii) $f'(3) = 2$; iv) $g'(5) = -3$; v) $f'(5) = -1$.

4.3.10 a) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$; b) $\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\left(1+\cos x^2\right) + 2x\sin\frac{1}{x}\sin x^2}{(1+\cos x^2)}$;
c) $\frac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$; d) $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}}}{4\left(1+\sqrt{x}\right)}$; e) $-4\cos^3 x \sin x \cos 5x - 5\cos^4 x \sin 5x$;
f) $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$; g) $-\frac{\ln 7}{x\ln^2 x}$.

4.3.12 a) $v(t) = D'(t) = \frac{2V}{\pi d D} = \frac{5}{\pi}$ [m/min]; b) $w = \frac{-vd}{\sqrt{l^2-d^2}} = -\frac{15}{2}$ [cm/sek];
c) $v_p = \infty$, $v_k = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{1}{4\pi}$ [cm/sek].

4.4.3 a) 1.99875 (1.99874); b) $\frac{\pi}{4} + 0.025 \approx 0.81$ (0.809784); c) 1 (0.999549);
d) 0.999 (0.999000); e) 0.004 (0.003992); f) 1.0012 (1.001201). Uwaga. W nawiasie podano wartości otrzymane przy pomocy programu DERIVE.

4.4.4 a) $0.06\pi\,\mathrm{m}^2$; b) 0.025 cm; c) $0.000048\,\mathrm{m}^2$.

4.4.6 a) $780\,\mathrm{mm}^2$; b) $0.01\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; c) $\frac{9}{800}$.

4.5.2 a) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = \left(2+4x^2\right)e^{x^2}$, $f'''(x) = \left(12+8x^2\right)xe^{x^2}$;
b) $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x}$; $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$;
c) $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$, $f''(x) = 3\cos^2 x\,(2\sin x - \cos x)$,
$f'''(x) = 6\cos x\left[1 + \sin x\cos x - 3\sin^2 x\right]$;
d) $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $f''(x) = 2\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)$, $f'''(x) = 2\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)$.

4.5.3 a) nie; b) nie; c) $f''(0) = 0$; d) nie.

4.5.4* a) $f'''(0) = 0$; b) $f'''(0) = 6$.

4.5.6* a) $f(x) = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^{2000}}{1999!}$; b) $f(x) = |x|^{101}$.

4.5.7 a) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$; b) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; c) $f^{(n)}(x) = (-1)^n 3^n e^{-3x}$;
d*) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(4^n \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$;
e*) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}}\right)$; f*), h*) Wskazówka. Wykorzystać liczby zespolone; g*) $f^{(n)}(x) = (n-2)! \cos^{n-1}(\operatorname{arctg} x) \sin\left[(n-1)\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$;
i*) $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

4.5.9 a) $e^x(x+n)$; b) $e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$;
c) $e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k \cos\left(2x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right)$; d) $\frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$ dla $n > 2$.

4.5.10* $\left(f^{-1}\right)''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$, gdzie $y_0 = f(x_0)$.

4.5.11* a) $(f \circ g)''(x_0) = f''[g(x_0)] \cdot [g'(x_0)]^2 + f'[g(x_0)] \cdot g''(x_0)$; a) $(f \circ g)'''(x_0) = f'''[g(x_0)] \cdot [g'(x_0)]^3 + 3f''[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot g''(x_0) + f'[g(x_0)] \cdot g'''(x_0)$.

4.5.13 a) $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$, $\vec{r}''(t) = (0, 2)$, punkt porusza się po paraboli $y = (x-1)^2$;
b) $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\vec{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$, punkt porusza się po lnii śrubowej.

4.5.14 a) $|\vec{v}| = \sqrt{109}$, prędkość oddalania się nie zależy od wysokości; b) $|\vec{w}| = 3\,[\mathrm{m/s}]$.

5

TWIERDZENIA O FUNKCJACH Z POCHODNYMI

5.1 Twierdzenia o wartości średniej

■ **Twierdzenie 5.1.1** *(Rolle'a*)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. jest ciągła na $[a,b]$,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a,b),
3. $f(a) = f(b)$,

to istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że

$$f'(c) = 0.$$

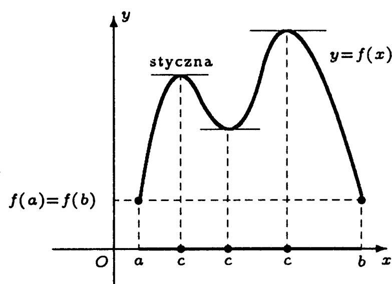
Uwaga. Założenia **1.** i **3.** twierdzenia można osłabić zastępując je warunkiem:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x),$$

przy czym granice mogą być także niewłaściwe.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną wewnątrz tego przedziału i przyjmującej jednakowe wartości na jego końcach, istnieje punkt, w którym styczna jest pozioma (rys. 5.1.1).



Rys. 5.1.1. Ilustracja twierdzenia Rolle'a.

*Michel Rolle (1652–1719), matematyk francuski.

○ **Ćwiczenie 5.1.2**

Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia oraz tezę twierdzenia Rolle'a na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$, $[-1, 1]$; b) $f(x) = |x-1|^3$, $[0, 2]$; c) $f(x) = x^4$, $[-1, 3]$.

○ **Ćwiczenie 5.1.3**

a) Dwa samochody wyścigowe minęły linię mety jednocześnie. Uzasadnić, że była taka chwila po starcie, w której ich liczniki wskazywały te same prędkości;

b*) Wielomian W ma 101 różnych pierwiastków rzeczywistych. Pokazać, że w pewnym punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$ mamy $W^{(100)}(x_0) = 0$.

● **Twierdzenie 5.1.4** *(Lagrange'a*[†]*)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

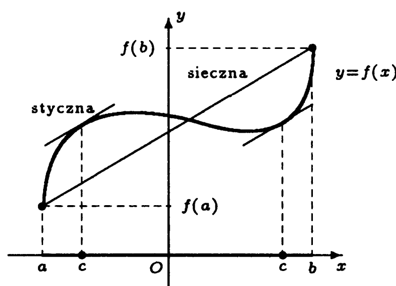
1. jest ciągła na $[a, b]$,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b),

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną wewnątrz tego przedziału, istnieje punkt, w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej łączącej jego końce (rys. 5.1.2).



Rys. 5.1.2. Ilustracja twierdzenia Lagrange'a.

○ **Ćwiczenie 5.1.5**

Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $[0, 3]$; b) $f(x) = \arccos x$, $[-1, 1]$.

[†]Joseph Louis de Lagrange (1736–1813), matematyk i astronom francuski.

○ **Ćwiczenie* 5.1.6**
Do funkcji
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$
zastosowano twierdzenie Lagrange'a na przedziale $[0,a]$ i otrzymano
$$a^2\sin\frac{1}{a}=a\left(2c\sin\frac{1}{c}-\cos\frac{1}{c}\right),\quad \text{gdzie } c\in(0,a).$$
Stąd $\cos\frac{1}{c}=2c\sin\frac{1}{c}-a\sin\frac{1}{a}$. Niech teraz $a\longrightarrow 0^+$. Wtedy także $c\longrightarrow 0^+$ i otrzymamy równość $\lim\limits_{c\to 0^+}\cos\frac{1}{c}=0$. Gdzie tkwi błąd w rozumowaniu?

○ **Ćwiczenie 5.1.7**
Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:
a) $\left|\cos^{100}x-\cos^{100}y\right|\leqslant 100|x-y|$ dla dowolnych $x,y\in\boldsymbol{R}$;
b) $|\arcsin x-\arcsin y|\geqslant|x-y|$ dla dowolnych $x,y\in[-1,1]$.

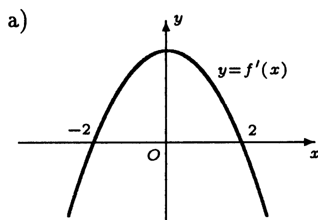
■ **Twierdzenie 5.1.8** *(warunki wystarczające monotoniczności funkcji)*
Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x\in I$ funkcja f spełnia warunek:
1. $f'(x)=0$, to jest stała na I;
2. $f'(x)>0$, to jest rosnąca na I;
3. $f'(x)\geqslant 0$, to jest niemalejąca na I;
4. $f'(x)<0$, to jest malejąca na I;
5. $f'(x)\leqslant 0$, to jest nierosnąca na I.

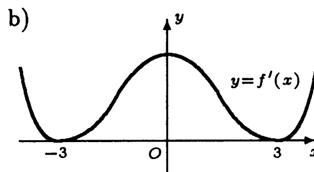
Uwaga. Jeżeli $f'(x)\geqslant 0$ dla każdego $x\in I$, przy czym równość $f'(x)=0$ zachodzi tylko dla skończonej liczby punktów tego przedziału, to funkcja f jest rosnąca na I. Podobnie jest dla funkcji malejącej.

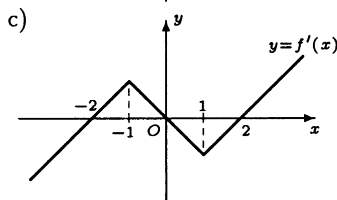
○ **Ćwiczenie 5.1.9**
Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:
a) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; b) $f(x)=\sin x+\cos x$; c) $f(x)=(x+1)e^{2x}$; d) $f(x)=3x^5+5x^3$;
e) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$; f) $f(x)=\operatorname{arctg} x-\ln x$; g) $f(x)=x+\cos x$; h) $f(x)=x^x$.

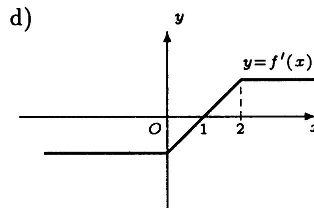
○ **Ćwiczenie 5.1.10**
Uzasadnić, że funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ jest malejąca na przedziałach $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$, ale nie jest malejąca na zbiorze $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, mimo, że $f'(x)<0$ dla każdego x z tego zbioru.

○ Ćwiczenie 5.1.11
Na rysunkach przedstawiono wykresy pochodnych funkcji. Podać przedziały, na których funkcje te są rosnące:

a)


b)


c)


d)


○ Ćwiczenie* 5.1.12
Podać przykład funkcji f ciągłej na $\boldsymbol{R}$, która spełnia warunek $f'(0) > 0$, ale nie jest rosnąca na żadnym otoczeniu punktu 0.

● Fakt 5.1.13 *(o tożsamościach)*
Niech funkcje f i g będą określone na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ oraz niech $x_0 \in I$. Wtedy, jeżeli spełnione są warunki:

1. $f(x_0) = g(x_0)$,
2. $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in I$,

to $f \equiv g$ na I.

○ Ćwiczenie 5.1.14
Korzystając z powyższego faktu uzasadnić podane tożsamości:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$;

b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ dla każdego $x \in (-1, 1)$.

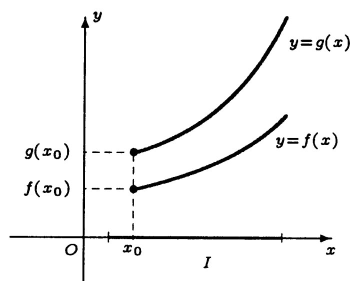
● Fakt 5.1.15 *(o nierównościach)*
Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ oraz niech $x_0 \in I$. Wtedy, jeżeli spełnione są warunki:

1. $f(x_0) \leqslant g(x_0)$,
2. $f'(x) \leqslant g'(x)$ dla każdego $x > x_0$,

to $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x > x_0$.

Uwaga. Jeżeli przynajmniej jedna z nierówności w założeniach powyższego twierdzenia jest ostra, to nierówność w tezie także jest ostra (rys. 5.1.3). Analogiczne twierdzenie prawdziwe jest także dla $x < x_0$.

Niżej podajemy sportową interpretację tego faktu:
jeżeli w chwili początkowej zawodnik G stoi na bieżni dalej niż F oraz, jeżeli w każdym momencie prędkość zawodnika G jest większa niż F, to zawodnik G będzie stale wyprzedzał konkurenta.



Rys. 5.1.3. Ilustracja twierdzenia o nierównościach.

○ **Ćwiczenie 5.1.16**

Korzystając z powyższego faktu uzasadnić nierówności:

a) $\sin x < x$ dla każdego $x > 0$; b) $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$;

c*) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ dla każdego $0 < x < \frac{\pi}{2}$; d*) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ dla każdego $x > 1$.

● **Twierdzenie* 5.1.17** *(Cauchy'ego)*

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

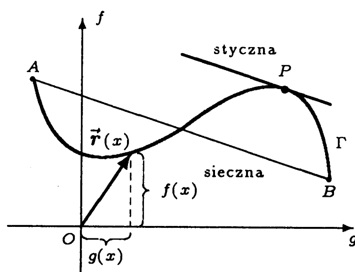
1. są ciągłe na $[a, b]$,
2. mają pochodne właściwe lub niewłaściwe na (a, b),
3. $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$,

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Cauchy'ego*

Niech $\vec{r}(x) = \big(g(x), f(x)\big)$, gdzie $x \in [a, b]$, będzie przedstawieniem parametrycznym krzywej Γ na płaszczyźnie. Wtedy istnieje punkt $P \in \Gamma$, w którym styczna jest równoległa do siecznej łączącej końce A i B tej krzywej (rys. 5.1.4).



Rys. 5.1.4. Ilustracja twierdzenia Cauchy'ego.

○ **Ćwiczenie* 5.1.18**

Sprawdzić, czy podane pary funkcji spełniają założenia twierdzenia Cauchy'ego na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $[-1, 1]$; b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

○ **Ćwiczenie* 5.1.19**
Teren wokół dwóch miejscowości jest poziomy, a ścieżka łącząca te miejscowości jest gładka. Pokazać, że turysta idący ścieżką w pewnej chwili będzie miał prędkość równoległą do prostej łączącej miejscowości. Czy to stwierdzenie będzie prawdziwe, gdy teren wokół miejscowości jest pofałdowany?

5.2 Twierdzenia o granicach nieoznaczonych

● **Twierdzenie 5.2.1** *(reguła de L'Hospitala*[‡] *dla nieoznaczoności* $\frac{0}{0}$*)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

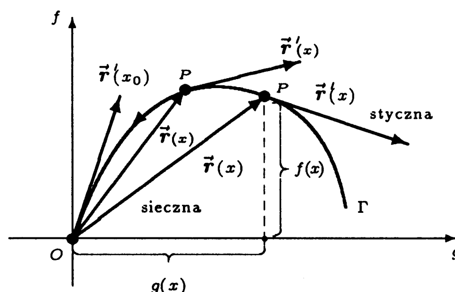
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,
2. istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub w ∞.

Interpretacja geometryczna reguły de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$*
Niech $\vec{r}(x) = \big(g(x), f(x)\big)$ będzie przedstawieniem parametrycznym krzywej płaskiej Γ wychodzącej z początku układu współrzędnych. Wtedy kierunek graniczny siecznych przechodzących przez początek układu i przez punkty P na krzywej Γ, gdy $P \longrightarrow O$, pokrywa się z granicznym kierunkiem stycznych do tej krzywej w punktach P, gdy $P \longrightarrow O$.



Rys. 5.2.1. Ilustracja reguły de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\dfrac{0}{0}$.

[‡]Guillaume François Antoine de L'Hôspital (1661–1704), matematyk francuski.

○ **Ćwiczenie 5.2.2**

Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x^3-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$; g) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 2x}$; h*) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sin\ln\left(2^x+1\right)}{\sin\ln\left(3^x+1\right)}$.

● **Twierdzenie 5.2.3** *(reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$)*

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,
2. istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

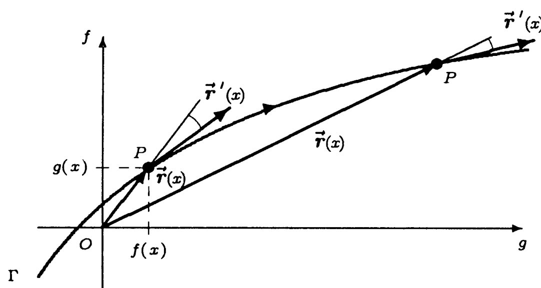
to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub w ∞.

Interpretacja geometryczna reguły de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$*

Niech $\vec{r}(x)=\big(g(x),f(x)\big)$ będzie przedstawieniem parametrycznym nieograniczonej krzywej płaskiej Γ. Wtedy graniczny kierunek siecznych przechodzących przez początek układu i przez punkty P na krzywej Γ, gdy punkt P oddala się do ∞, pokrywa się z granicznym kierunkiem stycznych do tej krzywej w punktach P, gdy P oddala się do ∞.



Rys. 5.2.2. Ilustracja reguły de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\dfrac{\infty}{\infty}$.

○ **Ćwiczenie 5.2.4**

Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{4x^3+2}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+1}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\operatorname{tg} x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\arcsin 5x}{\ln\arcsin x}$.

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

Nieoznaczoność	Stosowana tożsamość	Otrzymana nieoznaczoność
$0\cdot\infty$	$f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}$	$\dfrac{0}{0}$ lub $\dfrac{\infty}{\infty}$
$\infty-\infty$	$f-g=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$	$\dfrac{0}{0}$
$1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$	$f^g=e^{g\ln f}$	$0\cdot\infty$

Uwaga. Tożsamość podaną dla nieoznaczoności $\infty-\infty$ stosujemy dopiero wtedy, gdy zawiodą inne sposoby jej usuwania.

○ **Ćwiczenie 5.2.5**

Obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$; c) $\lim\limits_{x\to1+} x^{\ln(x-1)}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$; f*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{x^2}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\pi-x}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x)$; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^x}$;

j*) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$; k*) $\lim\limits_{x\to0+} x^{\sin x}$; l*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

5.3 Rozwinięcie Taylora funkcji

● **Definicja 5.3.1** *(wielomiany Taylora§ i Maclaurina¶)*

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą k-tego rzędu, gdzie $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Wielomian

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu k funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $P_k(x)$. Dla $x_0=0$ wielomian ten nazywamy wielomianem Maclaurina.

Uwaga. Wielomian P_k jest jedynym wielomianem stopnia k, który spełnia warunki:

$$P_k(x_0)=f(x_0),\quad P_k'(x_0)=f'(x_0),\ldots,\quad P_k^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0).$$

§Brook Taylor (1685–1731), matematyk angielski.
¶Colin Maclaurin (1698–1746), matematyk szkocki.

■ **Twierdzenie 5.3.2** *(wzór Taylora z resztą Lagrange'a)*
Jeżeli funkcja f ma:

1. ciągłą pochodną rzędu $n-1$ na przedziale $[x_0, x]$,
2. pochodną właściwą $f^{(n)}$ na przedziale (x_0, x),

to istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ taki, że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}_{\text{wielomian Taylora}} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Uwaga. Twierdzenie powyższe jest prawdziwe także dla przedziału $[x, x_0]$, wtedy $c \in (x, x_0)$. Równość występującą w tezie twierdzenia nazywamy wzorem Taylora, a wyrażenie

$$R_n(x) \stackrel{def}{=} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

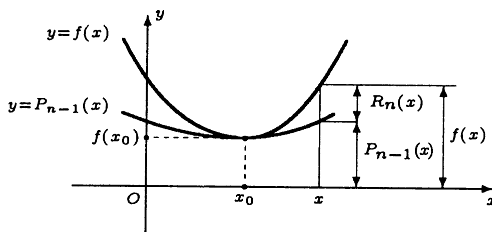
n-tą resztą Lagrange'a. Resztę tę można także zapisać w postaci

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta \Delta x)}{n!}(\Delta x)^n ,$$

gdzie $0 < \Theta < 1$ oraz $\Delta x = x - x_0$. Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przyjmuje postać

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}}_{\text{wielomian Maclaurina}} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n ,$$

gdzie $c \in (0, x)$ dla $x > 0$ lub $c \in (x, 0)$ dla $x < 0$. Równość tę nazywamy wzorem Maclaurina.



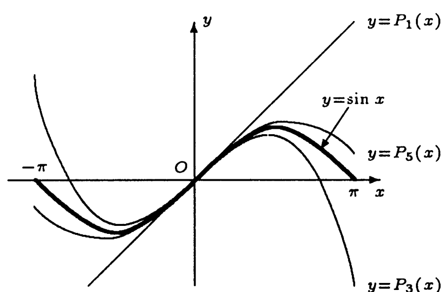
Rys. 5.3.1. Przybliżenie funkcji wielomianem Taylora.

○ **Ćwiczenie 5.3.3**
Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :
a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 5$; b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$, $n = 6$;
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 3$; d) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

Wzory Maclaurina dla niektórych funkcji elementarnych

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}e^c$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos c$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos c$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+c)^n}$

Uwaga. W powyższej tabeli punkt pośredni c należy do przedziału $(0, x)$, gdy $x > 0$ albo do przedziału $(x, 0)$, gdy $x < 0$.



Rys. 5.3.2. Kolejne przybliżenia funkcji $f(x) = \sin x$ wielomianami Maclaurina.

○ Ćwiczenie 5.3.4

Oszacować dokładności wzorów przybliżonych na podanych przedziałach:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ dla $|x| < \frac{\pi}{6}$; b) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ dla $|x| < \frac{1}{10}$.

○ Ćwiczenie 5.3.5

Stosując wzór Taylora do odpowiednio dobranych funkcji, punktów oraz $n \in N$ obliczyć wartości podanych wyrażeń ze wskazaną dokładnością:

a) $\cos 0.2$, 10^{-4}; b) e, 10^{-3}; c) $\ln 0.9$, 10^{-2}; d) $\sqrt[3]{1.003}$, 10^{-3}.

○ Ćwiczenie* 5.3.6

a) Niech p_n oznacza przybliżenie dziesiętne liczby π z dokładnością do n cyfr po przecinku. Pokazać, że liczba $\tilde{\pi} = p_n + \sin p_n$ jest przybliżeniem liczby π z dokładnością do $3n$ cyfr po przecinku. Np. dla $p_2 = 3.14$ mamy $\tilde{\pi} = \mathbf{3.141593}\ldots$.

b) Niech e_n oznacza przybliżenie liczby e z dokładnością do n cyfr po przecinku. Wtedy $\tilde{e} = e_n(2 - \ln e_n)$ jest przybliżeniem tej liczby z dokładnością do $2n$ cyfr po przecinku. Np. przyjmując $e_2 = 2.71$ otrzymamy wynik $\tilde{e} = \mathbf{2.7182}\ldots$.

● **Twierdzenie* 5.3.7** *(uzasadnianie nierówności za pomocą wzoru Taylora)*
Niech funkcja f spełnia założenia twierdzenia Taylora oraz niech $R_n(t) \geqslant 0$ dla każdego $t \in (x_0, x)$. Wtedy

$$f(t) \geqslant P_{n-1}(t) \text{ dla każdego } t \in [x_0, x].$$

○ **Ćwiczenie* 5.3.8**
Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić podane nierówności:

a) $e^x \geqslant 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$; b) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

5.4 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 5.1.1** *(Rolle'a)*
Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, więc z twierdzenia Weierstrassa (**Twierdzenie 3.4.1**) wynika, że osiąga ona swoje kresy na przedziale $[a, b]$. Jeżeli

$$\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

to funkcja f jest stała na przedziale $[a, b]$ i dowód jest zakończony. Jeżeli natomiast

$$\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} > \inf\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

to możliwe są dwa przypadki:

$$f(a) = f(b) \neq \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, \qquad f(a) = f(b) \neq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dalszy dowód przeprowadzimy tylko dla pierwszego przypadku. W drugim przypadku dowód jest analogiczny. Niech $c \in (a, b)$ będzie jednym z punktów, w którym zrealizowany jest kres. Mamy zatem $f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pokażemy, że $f'(c) = 0$. Dla każdego $x \in [a, b]$ spełniona jest nierówność $f(x) \geqslant f(c)$. Mamy zatem

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \text{ dla } a \leqslant x < c \text{ oraz } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \text{ dla } c < x \leqslant b.$$

Stąd

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_-(c) \leqslant 0 \text{ oraz } \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c) \geqslant 0.$$

Ponieważ w punkcie c funkcja f ma pochodną właściwą, więc $f'_-(c) = f'_+(c)$. Stąd $f'_-(c) = 0 = f'_+(c)$ i co za tym idzie $f'(c) = 0$.

■ **Dowód Twierdzenia 5.1.8** *(warunek wystarczający wzrostu funkcji)*
Niech x_1, x_2 będą dowolnymi punktami przedziału I spełniającymi nierówność $x_1 < x_2$. Mamy pokazać, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zastosujemy twierdzenie Lagrange'a (**Twierdzenie 5.1.4.**) do funkcji f na przedziale $[x_1, x_2]$. Wtedy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ gdzie } c \in (x_1, x_2).$$

Ponieważ $f'(c) > 0$ oraz $x_2 - x_1 > 0$, więc także $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$.

■ **Dowód Twierdzenia 5.3.2** *(wzór Taylora z resztą Lagrange'a)*
Dla $t \in [x_0, x]$ określamy funkcję pomocniczą

$$h(t) = g(t) - \frac{g(x_0)}{(x - x_0)^n}(x - t)^n, \text{ gdzie } g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k.$$

Pokażemy, że funkcja h spełnia założenia twierdzenia Rolle'a (**Twierdzenie 5.1.1**) na przedziale $[x_0, x]$. Rzeczywiście, funkcja h jest ciągła na tym przedziale oraz spełnia warunki $h(x_0) = 0$, $h(x) = 0$. Ponadto funkcja h ma pochodną właściwą na przedziale (x_0, x), która wyraża się wzorem

$$h'(t) = \frac{ng(x_0)}{(x - x_0)^n}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}.$$

Zatem z twierdzenia Rolle'a wynika, że dla pewnego punktu $c \in (x_0, x)$ mamy $h'(c) = 0$. Stąd

$$\frac{ng(x_0)}{(x - x_0)^n}(x - c)^{n-1} = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}.$$

Tak więc

$$g(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Podstawiając teraz we wzorze definiującym funkcję g za zmienną $t = x_0$ otrzymamy

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Stąd

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

5.5 Odpowiedzi i wskazówki

5.1.2 a) założenia ani teza nie są spełnione; **b)** założenia i teza są spełnione; **c)** założenia nie są spełnione, ale teza jest.

5.1.5 a) $c = 1$; **b)** $c = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$.

5.1.6* Wskazówka. Punkt c zależy od a.

5.1.7 a) rozważyć funkcję $f(t) = \cos^{100} t$ na przedziale $[x, y]$, gdzie $y > x$; **b)** rozważyć funkcję $f(t) = \arcsin t$ na przedziale $[x, y]$, gdzie $-1 \leqslant x < y \leqslant 1$.

5.1.9 a) $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ – funkcja rosnąca, $[-1, 1]$ – funkcja malejąca; **b)** $\left[-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ – funkcja rosnąca, $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ – funkcja malejąca, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$; **c)** $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ – funkcja rosnąca, $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ – funkcja malejąca; **d)** $\boldsymbol{R}$ – funkcja rosnąca; **e)** $\left[-\sqrt{3}, -1\right)$, $(-1, 1)$, $\left(1, \sqrt{3}\right]$ – funkcja rosnąca, $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right]$, $\left[\sqrt{3}, \infty\right)$ – funkcja malejąca; **f)** $(0, \infty)$ – funkcja malejąca; **g)** $\boldsymbol{R}$ – funkcja rosnąca; **h)** $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ –

funkcja malejąca, $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ – funkcja rosnąca.

5.1.10 Wskazówka. Porównać wartości $f(-1)$ i $f(1)$.

5.1.11* **a)** $(-2,2)$; **b)** $(-\infty,\infty)$; **c)** $(-2,0)$, $(2,\infty)$; **d)** $(1,\infty)$.

5.1.12* $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$.

5.1.18* **a)** nie; **b)** tak.

5.1.19* Nie.

5.2.2 **a)** $\frac{3}{5}$; **b)** $\frac{10}{3}$; **c)** 1; **d)** ∞; **e)** $\frac{1}{6}$; **f)** 0; **g)** $\frac{1}{4}$; **h*)** ∞.

5.2.4 **a)** 0; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** ∞; **e)** $-\infty$; **f)** 1; **g)** ∞; **h)** 1.

5.2.5 **a)** 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** ∞; **e)** $e^{-\frac{2}{\pi}}$; **f*)** $-\frac{2}{3}$; **g)** 0; **h)** ∞; **i)** ∞; **j*)** ∞; **k*)** 1; **l*)** 1.

5.3.3 **a)** $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{e^c}{120}x^5$, gdzie c leży między 0 i x;
b) $\cos x = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 - \frac{\cos c}{720}(x-\pi)^6$, gdzie c leży między π i x;
c) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16\sqrt{c^7}}(x-1)^3$, gdzie c leży między 1 i x;
d) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5(1+c)^3}x^5$, gdzie c leży między 0 i x.

5.3.4 **a)** $\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{5!}$; **b)** $\frac{1}{3^7}$.

5.3.5 **a)** 0.98; **b)** $2\frac{517}{720} \approx 2.718055$; **c)** -0.105; **d)** 1.001.

5.3.6* Wskazówka. **a)** Rozważyć funkcję $f(x) = x + \sin x$ i napisać dla niej wzór Taylora w punkcie $x_0 = \pi$; **b)** Rozważyć funkcję $f(x) = x(2 - \ln x)$ i napisać dla niej wzór Taylora w punkcie $x_0 = e$.

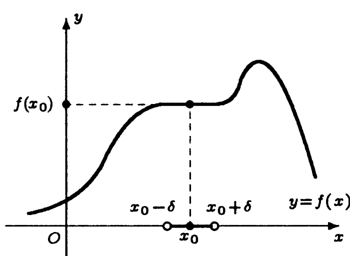
6

BADANIE FUNKCJI

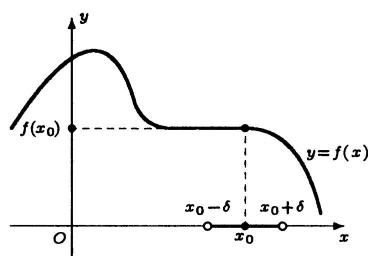
6.1 Ekstrema funkcji

• **Definicja 6.1.1** *(minimum lokalne funkcji)*
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$ minimum lokalne, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) \geqslant f(x_0).$$



Rys. 6.1.1. Minimum lokalne funkcji.



Rys. 6.1.2. Maksimum lokalne funkcji.

• **Definicja 6.1.2** *(maksimum lokalne funkcji)*
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$ maksimum lokalne, jeżeli

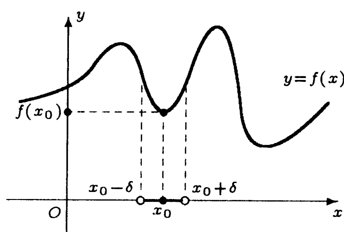
$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) \leqslant f(x_0).$$

○ **Ćwiczenie 6.1.3**
Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

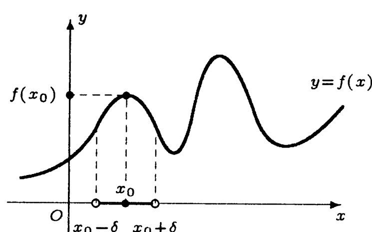
a) $f(x) \equiv 1,\ x_0 = 2$; b) $f(x) = |x| + x,\ x_0 = 0$.

• **Definicja 6.1.4** *(minimum lokalne właściwe funkcji)*
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$ minimum lokalne właściwe, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) > f(x_0).$$



Rys. 6.1.3. Minimum lokalne właściwe



Rys. 6.1.4. Maksimum lokalne właściwe.

Definicja 6.1.5 *(maksimum lokalne właściwe funkcji)*

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ maksimum lokalne właściwe, jeżeli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S(x_0,\delta)} f(x) < f(x_0).$$

Uwaga. Minima i maksima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy ekstremami lokalnymi.

Ćwiczenie 6.1.6

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne właściwe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = 2 - x^{100}$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \neq 1 \\ 2 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$; e) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$.

Twierdzenie 6.1.7 *(Fermata*, warunek konieczny istnienia ekstremum)*

Jeżeli funkcja f ma:

1. ekstremum lokalne w punkcie x_0,
2. pochodną $f'(x_0)$,

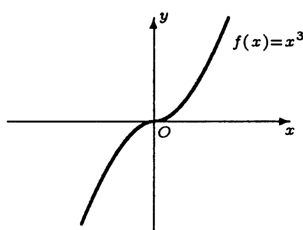
to

$$f'(x_0) = 0.$$

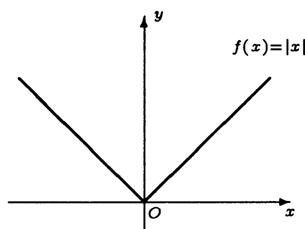
Uwaga. Implikacja odwrotna jest fałszywa. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^3$, która spełnia w punkcie $x_0 = 0$ warunek $f'(x_0) = 0$, ale nie ma tam ekstremum lokalnego (rys. 6.1.5). Założenie istnienia pochodnej funkcji f w tym twierdzeniu jest istotne. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = |x|$, która w punkcie $x_0 = 0$ ma minimum lokalne właściwe, ale $f'(x_0)$ nie istnieje (rys. 6.1.6).

---

*Pierre de Fermat (1601–1665), matematyk francuski.



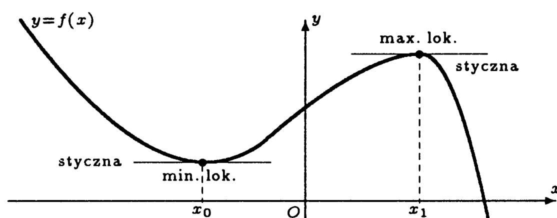
Rys. 6.1.5.



Rys. 6.1.6.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Fermata

Jeżeli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie oraz jeżeli w tym punkcie wykres funkcji ma styczną, to ta styczna jest pozioma.



Rys. 6.1.7. Styczne w punktach ekstremalnych funkcji są poziome.

● **Fakt 6.1.8** *(o lokalizacji ekstremów funkcji)*

Funkcja **może mieć** ekstrema lokalne **tylko** w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje.

○ **Ćwiczenie 6.1.9**

Dla podanych funkcji wskazać punkty, w których **mogą one mieć** ekstrema lokalne:

a) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$; b) $f(x) = x^{999} - 999x$; c) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x}$;

d) $f(x) = \ln(|x|+1)$; e) $f(x) = |x|(x+1)^5$; f) $f(x) = |x-1| + |x| + 2|x-3|$.

● **Twierdzenie 6.1.10** *(I warunek wystarczający istnienia ekstremum)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

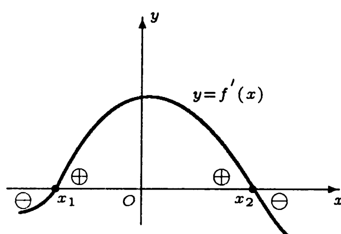
1. $f'(x_0) = 0$,

2. $$\bigvee_{\delta>0} \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in S\left(x_0^-, \delta\right), \\ f'(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in S\left(x_0^+, \delta\right), \end{cases}$$

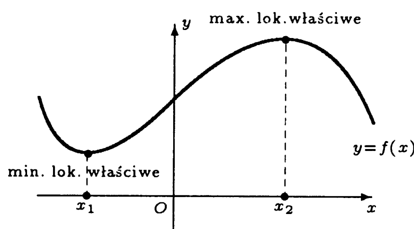
to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Uwaga. Zamiast założenia **1.** tego twierdzenia można przyjąć, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0. Natomiast zamiast założenia **2.** można przyjąć, że funkcja f jest rosnąca i malejąca odpowiednio na sąsiedztwach $S\left(x_0^-, \delta\right)$, $S\left(x_0^+, \delta\right)$.

Twierdzenie o minimum lokalnym właściwym jest analogiczne.



Rys. 6.1.8. Wykres pochodnej funkcji.



Rys. 6.1.9. Wykres funkcji.

○ **Ćwiczenie 6.1.11**

Korzystając z I warunku wystarczającego istnienia ekstremum znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$; b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$; c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; e) $f(x) = x\sqrt{4-x}$; f) $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x$.

○ **Ćwiczenie* 6.1.12**

Podać przykład funkcji ciągłej na $\boldsymbol{R}$, która w punkcie 0 ma minimum lokalne właściwe, ale nie jest malejąca na żadnym lewostronnym sąsiedztwie 0, ani rosnąca na żadnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu.

■ **Twierdzenie 6.1.13** *(II warunek wystarczający istnienia ekstremum)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$,
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geqslant 2$,

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Uwaga. Jeżeli założenie **2.** twierdzenia ma postać „$f^{(n)}(x_0) > 0$", to funkcja ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe. Natomiast, jeżeli założenie **3.** ma postać „n jest liczbą nieparzystą", a założenie **2.** postać „$f^{(n)}(x_0) \neq 0$", to funkcja w punkcie x_0 nie ma ekstremum lokalnego.

○ **Ćwiczenie 6.1.14**

Korzystając z II warunku wystarczającego istnienia ekstremum znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

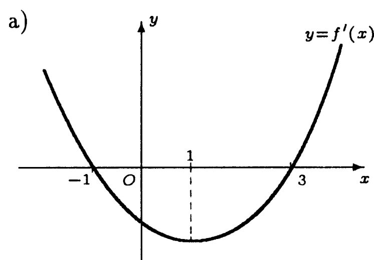
a) $f(x) = x^{100} + 2x^{50}$; b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

c) $f(x) = (x-5)e^x$; d) $f(x) = x(x-4)^3$.

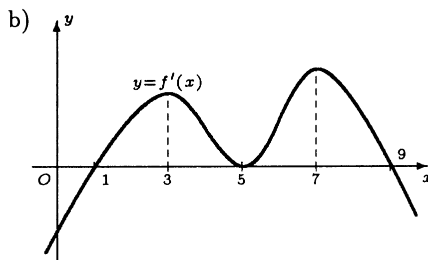
○ **Ćwiczenie 6.1.15**

Na rysunkach przedstawiono wykresy pochodnych funkcji. Wskazać punkty, w których funkcje te mają ekstrema lokalne:

a)



b)



○ **Ćwiczenie* 6.1.16**

Niech f będzie określona wzorem

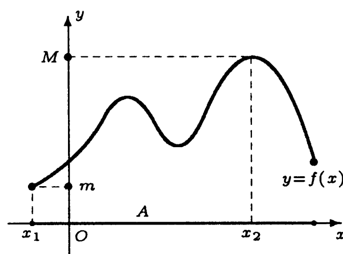
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Pokazać, że funkcja ta ma w punkcie 0 minimum lokalne właściwe oraz spełnia warunek $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}$.

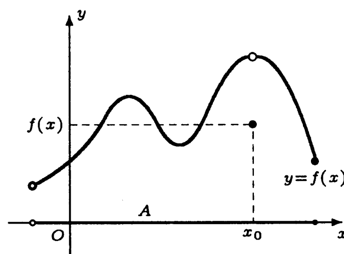
● **Definicja 6.1.17** *(wartość najmniejsza funkcji na zbiorze)*

Liczba $m \in \boldsymbol{R}$ jest wartością najmniejszą funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\bigvee_{x_0 \in A} f(x_0) = m \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{x \in A} f(x) \geqslant m.$$



Rys. 6.1.10. Wartość najmniejsza i największa funkcji.



Rys. 6.1.11. Funkcja f nie przyjmuje na zbiorze A wartości największej ani najmniejszej.

● **Definicja 6.1.18** *(wartość największa funkcji na zbiorze)*

Liczba $M \in \boldsymbol{R}$ jest wartością największą funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\bigvee_{x_0 \in A} f(x_0) = M \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{x \in A} f(x) \leqslant M.$$

Uwaga. Funkcja rosnąca na przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie a oraz wartość największą w punkcie b. Odwrotnie jest dla funkcji malejącej. Wartości najmniejszą i największą funkcji na zbiorze nazywamy jej ekstremami globalnymi.

○ **Ćwiczenie 6.1.19**

Sprawdzić, czy podane funkcje przyjmują wartości najmniejsze i największe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 2^x$, $(-\infty, 0)$; b) $f(x) = 2 - |x|$, $(-1, 4)$;

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $[1, \infty)$; d) $f(x) = \sin x$, $(0, \pi]$.

Algorytm szukania wartości ekstremalnych funkcji na przedziale

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ i niech ma pochodną właściwą lub niewłaściwą poza skończoną liczbą punktów tego przedziału. Wartości najmniejszej i największej tej funkcji na tym przedziale szukamy postępując według algorytmu:

1. znajdujemy punkty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zerowania się pochodnej funkcji f na przedziale (a, b) oraz punkty $d_1, d_2, \ldots, d_m$, w których pochodna właściwa tej funkcji nie istnieje;
2. obliczamy wartości funkcji f w punktach końcowych a, b; w punktach zerowania się pierwszej pochodnej $c_1, c_2, \ldots, c_n$ oraz w punktach bez pochodnej właściwej $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
3. spośród liczb

$$f(a), f(b);\ f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n);\ f(d_1), f(d_2), \ldots, f(d_m)$$

wybieramy najmniejszą i największą. Będą to odpowiednio wartości najmniejsza m i największa M funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Rys. 6.1.12. Wartości ekstremalne funkcji na przedziale.

○ **Ćwiczenie 6.1.20**

Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = |x-1|$, $[0,3]$; b) $f(x) = x^3 \cdot |x+2|$, $[-4,1]$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1,2]$; d) $f(x) = 1 + |\operatorname{arctg}(x-1)|$, $[-2,2]$;

e) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; f) $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$, $[-1,2]$.

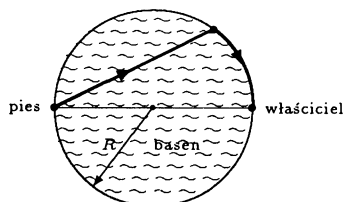
○ **Ćwiczenie 6.1.21**

a) Tekst w książce zajmuje na każdej stronie powierzchnię $200\,\mathrm{cm}^2$, marginesy z lewej i z prawej strony są równe 1 cm, a marginesy z dołu i z góry są równe 2 cm. Zaprojektować wymiary kartek w tej książce tak, aby zużyć jak najmniej papieru.

b) W półkole o promieniu R wpisać prostokąt o największym polu. Dwa wierzchołki prostokąta mają leżeć na półokręgu, a pozostałe na średnicy.

c) Znaleźć wymiary puszki do konserw w kształcie walca o objętości $V = 250\pi\,\mathrm{cm}^3$, do sporządzenia której zużyje się najmniej blachy;

d) Pies i jego właściciel stoją po przeciwnych stronach okrągłego basenu o promieniu $R = 10\,\mathrm{m}$ (rysunek). Pies biega z prędkością $v_b = 5\,\mathrm{m/s}$ i pływa z prędkością $v_p = 1\,\mathrm{m/s}$. Jak powinien poruszać się pies, aby najszybciej dotrzeć do właściciela?



e) Znaleźć odległość punktu $P_0 = (0,0,0)$ od prostej

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R};$$

f*) Trzy kolejne boki czworokąta mają długości 1, 1, 1. Jaka powinna być długość czwartego boku oraz jaki powinien być kształt czworokąta, aby miał on największe pole?

○ **Ćwiczenie* 6.1.22**

Podać przykłady zjawisk przyrodniczych, w których natura sama znajduje rozwiązania zagadnień ekstremalnych.

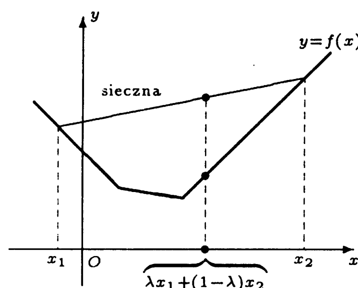
6.2 Funkcje wypukłe i wklęsłe

● **Definicja 6.2.1** *(funkcja wypukła)*

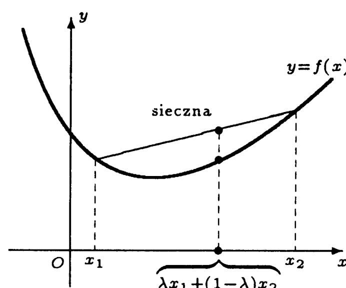
Funkcja f jest wypukła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jeżeli

$$\bigwedge_{a<x_1<x_2<b} \; \bigwedge_{0<\lambda<1} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Geometrycznie: wypukłość funkcji oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży wyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna (rys. 6.2.1). Funkcję wypukłą nazywa się także wypukłą w dół.



Rys. 6.2.1. Funkcja wypukła.



Rys. 6.2.2. Funkcja ściśle wypukła.

Definicja 6.2.2 *(funkcja ściśle wypukła)*

Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jeżeli

$$\bigwedge_{a<x_1<x_2<b} \ \bigwedge_{0<\lambda<1} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Geometrycznie: funkcja jest ściśle wypukła, gdy każdy odcinek siecznej wykresu leży wyżej niż fragment wykresu położony między punktami, przez które przechodzi sieczna (rys. 6.2.2). Funkcję ściśle wypukłą nazywa się także ściśle wypukłą w dół.

Ćwiczenie* 6.2.3

Korzystając z definicji sprawdzić, że podane funkcje są ściśle wypukłe na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

Definicja 6.2.4 *(funkcja wklęsła)*

Funkcja f jest wklęsła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jeżeli

$$\bigwedge_{a<x_1<x_2<b} \ \bigwedge_{0<\lambda<1} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

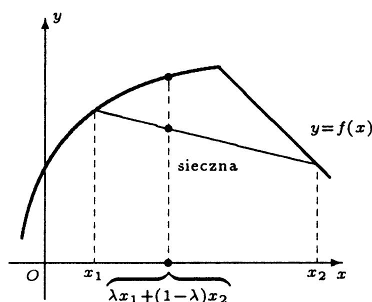
Geometrycznie: wklęsłość funkcji oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży niżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna (rys. 6.2.3). Funkcję wklęsłą nazywa się także wypukłą w górę.

Definicja 6.2.5 *(funkcja ściśle wklęsła)*

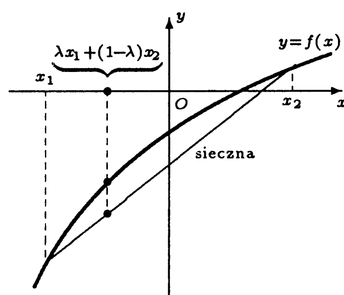
Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jeżeli

$$\bigwedge_{a<x_1<x_2<b} \ \bigwedge_{0<\lambda<1} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Geometrycznie: funkcja jest ściśle wklęsła, gdy każdy odcinek siecznej wykresu leży niżej niż fragment wykresu położony między punktami, przez które przechodzi sieczna (rys. 6.2.4). Funkcję ściśle wklęsłą nazywa się także ściśle wypukłą w górę.



Rys. 6.2.3. Funkcja wklęsła.



Rys. 6.2.4. Funkcja ściśle wklęsła.

Uwaga. Fakt, że funkcja jest ściśle wypukła (wklęsła) na pewnym przedziale zapisujemy symbolicznie $\smile$ ($\frown$). Fakt, że funkcja jest rosnąca (malejąca) oraz jednocześnie wypukła [wklęsła] zapisujemy symbolicznie: $\nearrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\searrow$

○ **Ćwiczenie* 6.2.6**
Korzystając z definicji sprawdzić, że podane funkcje są ściśle wklęsłe na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$; b) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

○ **Ćwiczenie* 6.2.7**
Pokazać, że funkcja wypukła na przedziale otwartym jest ciągła na tym przedziale oraz w każdym jego punkcie ma obie pochodne jednostronne.

■ **Twierdzenie 6.2.8** *(warunek wystarczający wypukłości)*
Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest ściśle wypukła na (a, b).

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla pozostałych typów funkcji wypukłych. Jeżeli $f''(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, przy czym równość $f''(x) = 0$ zachodzi jedynie dla skończonej liczby punktów z odcinka (a, b), to funkcja f jest ściśle wypukła. Podobnie jest dla funkcji ściśle wklęsłej.

○ **Ćwiczenie 6.2.9**
Określić przedziały wypukłości i wklęsłości podanych funkcji:

a) $f(x) = e^{-x}$; b) $f(x) = x^4$; c) $f(x) = \sin x$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; e) $f(x) = |x|$; f) $f(x) = \left|x^5\right|$.

○ **Ćwiczenie 6.2.10**
Naszkicować wykresy funkcji ciągłych $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełniających wszystkie podane warunki:

a) $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$, $f''(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$;

b) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(x) > 0$ dla $x < 1$, $f''(x) < 0$ dla $x > 1$;

c) $f(1) = -1$, $f''(x) > 0$ dla $x \neq 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty$.

○ **Ćwiczenie 6.2.11**

Korzystając z wypukłości odpowiednich funkcji uzasadnić podane nierówności:

a) $e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \dfrac{e^x + e^y}{2}$ dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$;

b) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^5 \leqslant \dfrac{x^5 + y^5}{2}$ dla dowolnych $x, y \in [0, \infty)$;

c*) $\ln\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}\right)^6 \geqslant \ln\left(x^3 y^2 z\right)$ dla dowolnych $x, y, z \in (0, \infty)$.

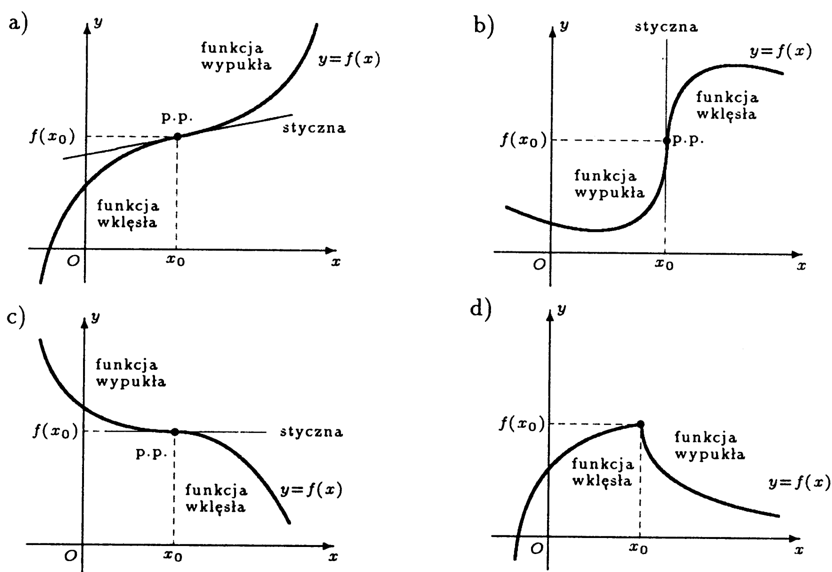
● **Fakt* 6.2.12** *(o ekstremach funkcji wypukłych)*

Funkcja ściśle wypukła (wklęsła) na przedziale $[a, b]$ osiąga wartość najmniejszą (największą) tylko w jednym punkcie tego przedziału.

6.3 Punkty przegięcia wykresu funkcji

● **Definicja 6.3.1** *(punkt przegięcia wykresu funkcji)*

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu x_0. Ponadto niech funkcja f ma tam pochodną właściwą lub niewłaściwą. Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia (skrót p.p.) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest ściśle wypukła na $S\left(x_0^-, \delta\right)$ oraz ściśle wklęsła na $S\left(x_0^+, \delta\right)$ albo jest odwrotnie.



Rys. 6.3.1. a), b), c) Funkcje z punktami przegięcia.
d) Funkcja bez punktu przegięcia.

Obrazowo: punkt wykresu funkcji jest punktem przegięcia, jeżeli funkcja ma w tym punkcie styczną i zmienia w nim rodzaj wypukłości. Wykres funkcji przechodzi

wtedy z jednej strony stycznej na drugą (rys. 6.3.1 a), b), c)). Mówi się także, że x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.

• **Twierdzenie 6.3.2** *(warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)*

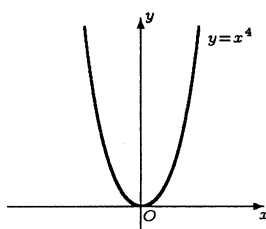
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $(x_0, f(x_0))$ jest jej punktem przegięcia,
2. istnieje $f''(x_0)$,

to

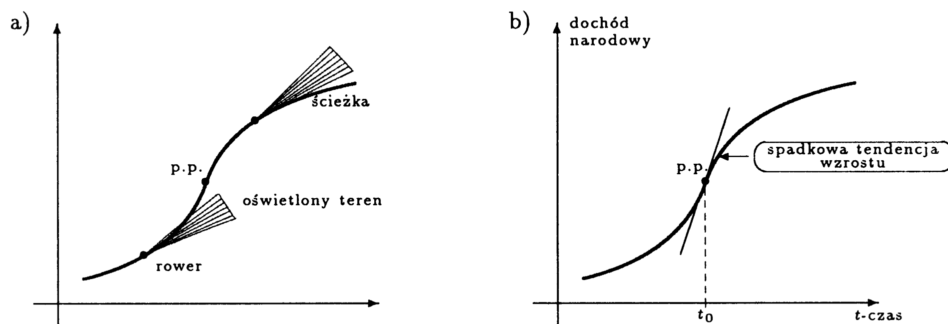
$$f''(x_0) = 0.$$

Uwaga 1. Implikacja odwrotna w tym twierdzeniu nie jest prawdziwa. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^4$, która spełnia warunek $f''(0) = 0$, ale $(0,0)$ nie jest punktem przegięcia jej wykresu (rys. 6.3.2).



Rys. 6.3.2.

Uwaga 2. Wieczorem jadąc na rowerze ścieżką, która ma kształt wykresu funkcji wypukłej, oświetlamy lampą prawą stronę drogi. Odwrotnie jest na wklęsłych fragmentach drogi. W punkcie przegięcia ścieżki zmienia się strona oświetlania (rys. 6.3.3 a)).



Rys. 6.3.3.

W ekonomii punkt przegięcia funkcji rosnącej opisującej np. dochód narodowy, popyt na towary itp., jest nazywany momentem rozpoczęcia spadkowej tendencji wzrostu (rys. 6.3.3 b)).

○ **Ćwiczenie 6.3.3**

Podać przykłady funkcji opisujących wielkości występujące w biologii, fizyce, technice itp., których wykresy mają punkty przegięcia.

● **Fakt 6.3.4** *(o lokalizacji punktów przegięcia wykresu funkcji)*

Funkcja **może mieć** punkty przegięcia **jedynie** w punktach zerowania się jej drugiej pochodnej albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje.

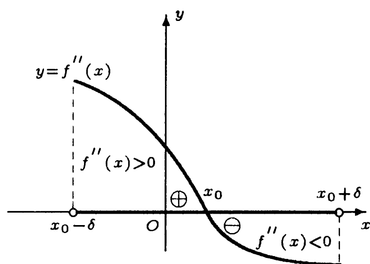
● **Twierdzenie 6.3.5** *(I warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

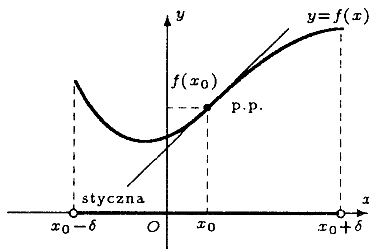
1. w punkcie x_0 ma pochodną właściwą lub niewłaściwą,
2. $\bigvee_{\delta>0} \begin{cases} f''(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in S\left(x_0^-, \delta\right), \\ f''(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in S\left(x_0^+, \delta\right), \end{cases}$

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia jej wykresu.

Uwaga. Twierdzenie powyższe jest prawdziwe także wtedy, gdy nierówności dla drugiej pochodnej są odwrotne w sąsiedztwach jednostronnych punktu x_0 (rys. 6.3.4).



Rys. 6.3.4. Wykres drugiej pochodnej funkcji.



Rys. 6.3.5. Wykres funkcji.

○ **Ćwiczenie 6.3.6**

Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć punkty przegięcia podanych funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$; b) $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = e^{\cos x}$;

d) $f(x) = x^2 \ln x$; e) $f(x) = |x|^3$; f) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

● **Twierdzenie 6.3.7** *(II warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geqslant 3$,

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia jej wykresu.

Uwaga. Jeżeli założenie **3.** ma postać „n jest liczbą parzystą”, to $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia.

○ **Ćwiczenie 6.3.8**

Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć punkty przegięcia podanych funkcji:
a) $f(x) = x^{99} + x^3$; b) $f(x) = \cos^4 x$; c) $f(x) = x^2 + 2\sin x$.

Pochodne a wykres funkcji

Warunki, które spełniają pochodne funkcji na przedziale lub w punkcie			Własności funkcji	Wykres funkcji
f'	f''	f'''		
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$		rosnąca i wypukła	
$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$		rosnąca i wklęsła	
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$		malejąca i wypukła	
$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$		malejąca i wklęsła	
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$		minimum lokalne właściwe	
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$		maksimum lokalne właściwe	
	$f''(x_0) = 0$	$f'''(x_0) \neq 0$	punkt przegięcia	

○ **Ćwiczenie* 6.3.9**
Podać przykład funkcji różniczkowalnej na $\mathbb{R}$, która spełnia warunek $f'(0) = 0$, ale w 0 nie ma punktu przegięcia ani ekstremum lokalnego.

6.4 Badanie funkcji

1. Ustalenie dziedziny funkcji.
2. Wskazanie podstawowych własności funkcji:
   a) parzystość lub nieparzystość,
   b) okresowość,
   c) miejsca zerowe,
   d) ciągłość.
3. Obliczenie granic lub wartości funkcji na „krańcach" dziedziny.
4. Znalezienie asymptot pionowych i ukośnych.
5. Zbadanie pierwszej pochodnej funkcji:
   a) wyznaczenie dziedziny pochodnej i jej obliczenie,
   b) wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć ekstrema,
   c) ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji,
   d) ustalenie ekstremów funkcji,
   e) obliczenie granic lub wartości pochodnej na „krańcach" jej dziedziny.
6. Zbadanie drugiej pochodnej funkcji:
   a) wyznaczenie dziedziny drugiej pochodnej i jej obliczenie,
   b) wyznaczenie miejsc, w których funkcja może mieć punkty przegięcia,
   c) ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości,
   d) wyznaczenie punktów przegięcia wykresu funkcji,
   e) obliczenie pierwszej pochodnej w punktach przegięcia.
7. Sporządzenie tabelki (nieobowiązkowe).
8. Sporządzenie wykresu funkcji.

○ **Ćwiczenie 6.4.1**
Zbadać podane funkcje i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; b) $f(x) = -x^3 + 4x - 3$; c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$;

d) $f(x) = xe^{-2x}$; e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; f) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$;

g) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$; h*) $f(x) = x^x$; i*) $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

6.5 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 6.1.7** *(Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum)*
Dla ustalenia uwagi dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne. Dla minimum lokalnego dowód przebiega podobnie. Istnieje zatem sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że $f(x) \leqslant f(x_0)$ dla każdego $x \in S(x_0)$. Pokażemy, że $f'_-(x_0) \geqslant$

0 oraz $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Rzeczywiście

$$f'_-(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0,$$

gdyż $f(x)-f(x_0) \leqslant 0$ oraz $x-x_0<0$ dla każdego $x\in S_-(x_0)$. Podobnie mamy w przypadku drugiej nierówności

$$f'_+(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

gdyż $f(x)-f(x_0)\leqslant 0$ oraz $x-x_0>0$ dla każdego $x\in S_+(x_0)$. Ponieważ funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą, więc

$$0 \leqslant f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leqslant 0.$$

Stąd $f'(x_0)=0$.

■ **Dowód Twierdzenia 6.1.13** *(II warunek wystarczający istnienia maksimum)*
Dowód przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że n-ta pochodna funkcji f jest ciągła w punkcie x_0. Twierdzenie jest prawdziwe także bez tego założenia. Wtedy jednak dowód jest bardziej skomplikowany.

W dowodzie wykorzystamy łatwą do wykazania własność funkcji ciągłej; jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 oraz spełnia nierówność $f(x_0)<0$, to $f(x)<0$ dla każdego x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0.

Ponieważ funkcja f spełnia założenia twierdzenia Taylora (**Twierdzenie 5.3.2**) na pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0, więc dla każdego $x\in O(x_0)$ mamy

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

gdzie c jest pewnym punktem z przedziału (x_0,x) lub (x,x_0). Korzystając teraz z równości

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

otrzymamy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \text{ dla każdego } x\in S(x_0).$$

Ponieważ $f^{(n)}(x_0)<0$, więc także $f^{(n)}(c)<0$ dla c z pewnego sąsiedztwa punktu x_0. Stąd otrzymujemy

$$f(x) < f(x_0) \text{ dla każdego } x\in S(x_0).$$

Oznacza to, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

■ **Dowód Twierdzenia 6.2.8** *(warunek wystarczający wypukłości)*
Niech $a<x_1<x_2<b$ oraz niech $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, gdzie $0<\lambda<1$. Funkcja f spełnia na przedziałach $[x_1,x]$ oraz $[x,x_2]$ założenia twierdzenia Lagrange'a. Istnieją zatem liczby $c_1\in(x_1,x)$ oraz $c_2\in(x,x_2)$ takie, że

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \quad \text{oraz} \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2).$$

Oczywiście $c_1 < c_2$. Z warunku $f''(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$ wynika, że funkcja f' jest rosnąca, więc $f'(c_1) < f'(c_2)$. Stąd mamy nierówność

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

więc

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) < (x - x_1)(f(x_2) - f(x)).$$

Dalej otrzymujemy, że

$$f(x)(x_2 - x + x - x_1) < (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

zatem

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Zauważmy teraz, że $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \lambda$, zaś $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$. Ostatecznie otrzymujemy więc nierówność

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Funkcja f jest zatem ściśle wypukła.

6.6 Odpowiedzi i wskazówki

6.1.9 a) $x = 2$; **b)** $x = 1$ lub $x = -1$; **c)** $x = 0$; **d)** $x = 0$; **e)** $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{6}$ lub $x = 0$; **f)** $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 3$.

6.1.11 a) $f_{\min}(0) = 2$; **b)** $f_{\min}(2) = -8$, $f_{\max}(0) = -4$; **c)** $f_{\min}(-1) = -\frac{1}{2}$, $f_{\max}(1) = \frac{1}{2}$; **d)** $f_{\min}(e) = \frac{1}{e}$; **e)** $f_{\max}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$; **f)** $f_{\min}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -2$, $f_{\max}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

6.1.12 $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

6.1.14 a) $f_{\min}(0) = 0$; **b)** $f_{\min}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_{\min}(\pi + 2k\pi) = -1$, $f_{\min}\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_{\max}(2k\pi) = f_{\max}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$; **c)** $f_{\min}(4) = -e^4$; **d)** $f_{\min}(1) = -27$.

6.1.15 a) w punkcie $x = 1$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe, a w punkcie $x = 3$ minimum lokalne właściwe; **b)** w punkcie $x = 1$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe, a w punkcie $x = 9$ maksimum lokalne właściwe, w punkcie $x = 5$ nie ma ekstremum lokalnego.

6.1.19 a) funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej ani największej; **b)** funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, $M = 2 = f(0)$; **c)** funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, $M = 1 = f(1)$; **d)** $m = 0 = f(\pi)$, $M = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

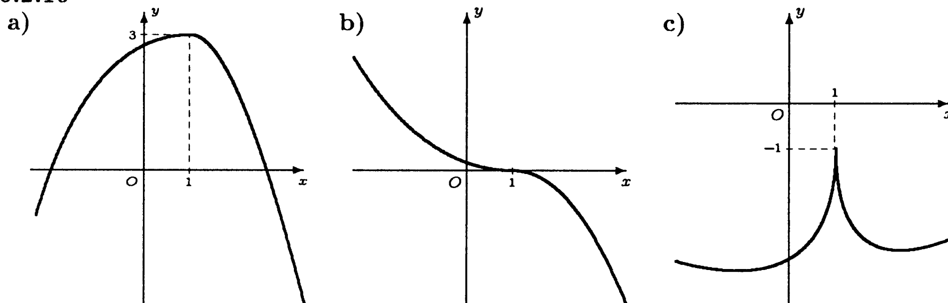
6.1.20 a) $m = 0 = f(1)$, $M = 2 = f(3)$; **b)** $m = -128 = f(-4)$, $M = 3 = f(1)$; **c)** $m = 0 = f(0)$, $M = \sqrt[3]{3} = f(2)$; **d)** $m = 1 = f(1)$, $M = 1 + \operatorname{arctg} 3 = f(-2)$;

e) $m = 1 = f(0)$, $M = 2 = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; **f)** $m = \frac{5}{6} = f(-1) = f(2)$, $M = \frac{3}{2} = f(0) = f(1)$.

6.1.21 a) $12\,\text{cm} \times 24\,\text{cm}$; **b)** $a = R\sqrt{2}$, $b = \frac{R}{\sqrt{2}}$; **c)** $r = 5\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{cm}$; **d)** pies powinien płynąc pod kątem $\arcsin\frac{1}{5}$ do średnicy; **e)** $t_{\min} = \frac{8}{27}$; **f*)** 2, połowa sześciokąta foremnego.

6.2.9 a) $(-\infty,\infty)$ – funkcja ściśle wypukła; **b)** $(-\infty,\infty)$ – funkcja ściśle wypukła; **c)** $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ – funkcja ściśle wypukła, $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ – funkcja ściśle wklęsła, gdzie $k \in Z$; **d)** $(-\infty, 0)$ – funkcja ściśle wypukła, $(0,\infty)$ – funkcja ściśle wklęsła; **e)** $(-\infty,\infty)$ – funkcja wypukła; **f)** $(-\infty,\infty)$ – funkcja ściśle wypukła.

6.2.10



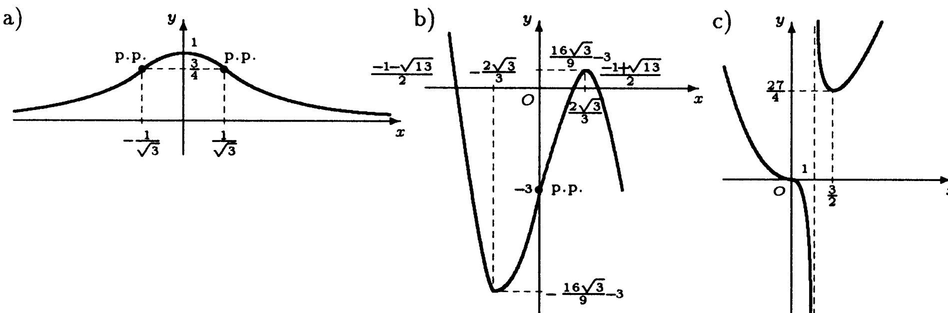
6.2.11* Nierówności wynikają z wypukłości funkcji: **a)** e^x; **b)** x^5; **c*)** $-\ln x$.

6.3.6 a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; **b)** $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; **c)** $x_0 = \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$; **d)** $x_0 = e^{-\frac{3}{2}}$; **e)** $x_0 = 0$; **f)** $x_0 = 0$.

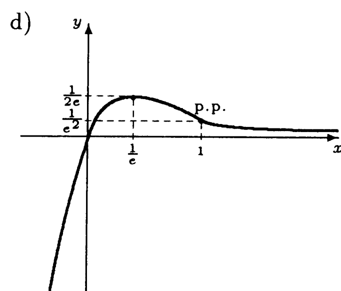
6.3.8 a) $x_0 = 0$; **b)** $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_l = \pm\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2l\pi$, gdzie $k, l \in Z$; **c)** nie ma punktów przegięcia.

6.3.9 $f(x) = \begin{cases} x^3\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

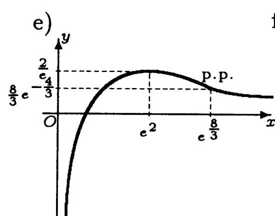
6.4.1



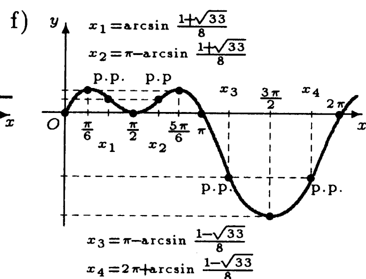
d)


y
$\frac{1}{2e}$
$\frac{1}{e^2}$
p.p.
$\frac{1}{e}$
1
x

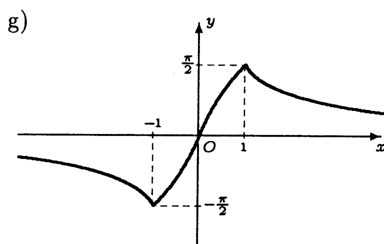
e)


y
$\frac{2}{e}$
$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
p.p.
O
e^2
$e^{\frac{8}{3}}$
x

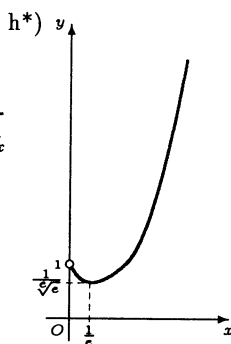
f)


y
$x_1 = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$
$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$
p.p.
p.p
x_3
$\frac{3\pi}{2}$
x_4
2π
O
$\frac{\pi}{6}$
x_1
$\frac{\pi}{2}$
x_2
$\frac{5\pi}{6}$
π
x
p.p.
p.p.
$x_3 = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{33}}{8}$
$x_4 = 2\pi + \arcsin \frac{1-\sqrt{33}}{8}$

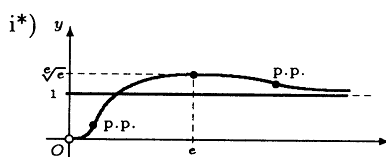
g)


y
$\frac{\pi}{2}$
-1
O
1
x
$-\frac{\pi}{2}$

h*)


y
1
$\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$
O
$\frac{1}{e}$
x

i*)


y
$\sqrt[e]{e}$
1
p.p.
p.p.
O
e

7

CAŁKI NIEOZNACZONE

7.1 Funkcje pierwotne

- **Definicja 7.1.1** *(funkcja pierwotna)*

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

○ **Ćwiczenie 7.1.2**

Pokazać, że funkcja $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nie ma pierwotnej na przedziale $(-1, 1)$.

○ **Ćwiczenie 7.1.3**

Podać przykłady funkcji pierwotnych dla podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sin x$, $\boldsymbol{R}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, \infty)$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(-\infty, 0)$.

○ **Ćwiczenie 7.1.4**

Uzasadnić, że funkcje F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi dla wskazanych funkcji f :

a) $F_1(x) = 1 + \arcsin x$, $F_2(x) = 5 - \arccos x$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $F_1(x) = 3 - \cos^2 x$, $F_2(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = \sin 2x$.

- **Twierdzenie 7.1.5** *(podstawowe o funkcjach pierwotnych)*

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy

1. $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \boldsymbol{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I,
2. każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + D$, gdzie $D \in \boldsymbol{R}$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać $F(x) + C$ i tylko takie są funkcjami pierwotnymi.

- **Twierdzenie 7.1.6** *(warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)*

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Uwaga. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną, np. pierwotne funkcji:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sqrt{1+x^3}, \quad \cos x^2, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \sqrt{x}\sin x$$

nie są funkcjami elementarnymi.

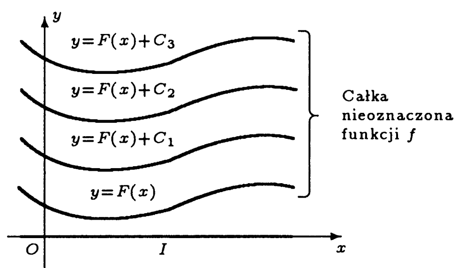
7.2 Całki nieoznaczone

● **Definicja 7.2.1** *(całka nieoznaczona)*

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in \boldsymbol{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)\,dx$ lub krótko $\int f$.



Rys. 7.2.1. Całka nieoznaczona funkcji.

Uwaga. W dalszej części skryptu będziemy opuszczali nawiasy klamrowe w definicji całki nieoznaczonej. Działania i operacje na całkach nieoznaczonych oznaczają działania i operacje na funkcjach pierwotnych reprezentujących te całki. Równość całek nieoznaczonych oznacza równość funkcji pierwotnych reprezentujących te całki.

● **Fakt 7.2.2** *(pochodna całki nieoznaczonej)*

Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy dla każdego $x \in I$

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$$

● **Fakt 7.2.3** *(całka nieoznaczona pochodnej)*

Niech funkcja f' ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy dla każdego $x \in I$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

gdzie $C \in \boldsymbol{R}$.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$\int 0\,dx = C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p \in \{-2, -3, -4, \ldots\}$, $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$ *
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\lvert x\rvert < 1$
$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$	$x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$

Uwaga. W tabeli C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

* Zakres zmiennej x jest ustalany w zależności od parametru α.

○ **Ćwiczenie 7.2.4**
Korzystając z powyższej tabeli obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int x^5\,dx$; b) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{x^4}$; d) $\int 4^x\,dx$;
e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; f) $\int \frac{dx}{3^x}$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$; h) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}$.

○ **Ćwiczenie* 7.2.5**
Wiadomo, że funkcja f spełnia warunek:

a) $f'\left(x^2\right) = \frac{1}{x}$; b) $f'\left(\sin^2 x\right) = \cos^2 x$; c) $f'\left(e^x\right) = e^{-x}$.

Znaleźć tę funkcję.

7.3 Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

● **Twierdzenie 7.3.1** *(o liniowości całki nieoznaczonej)*
Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,

2. $\int \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$,

3. $\int \Big(cf(x)\Big)\,dx = c\int f(x)\,dx$, gdzie $c \in \boldsymbol{R}$.

Uwaga. Pierwszy wzór jest prawdziwy także dla dowolnej liczby składników. **Na ogół całka iloczynu funkcji nie równa się iloczynowi całek tych funkcji.** Np.

$$\int \left(x \cdot x^2\right)\,dx \neq \left(\int x\,dx\right) \cdot \left(\int x^2\,dx\right).$$

○ **Ćwiczenie 7.3.2**
Korzystając z twierdzenia o liniowości całki nieoznaczonej obliczyć podane całki:

a) $\int \left(x - 2e^x\right)\,dx$; b) $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\,dx$; c) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

d) $\int 3^x 5^{-2x}\,dx$; e) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; f) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$;

g) $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$; h) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$; i) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$.

○ **Ćwiczenie 7.3.3**
Obliczyć całki:

a) $\int |x - 3|\,dx$; b) $\int \sin|x|\,dx$; c) $\int \max\left(1, x^2\right)\,dx$; d*) $\int |\sin x|\,dx$.

■ **Twierdzenie 7.3.4** *(o całkowaniu przez części)*
Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

○ **Ćwiczenie 7.3.5**
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int x\sin x\,dx$; b) $\int x^2e^{-x}\,dx$; c) $\int \ln^2 x\,dx$; d) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;
e) $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$; f) $\int 3^x\cos x\,dx$; g*) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$; h*) $\int xe^x\sin x\,dx$.

○ **Ćwiczenie 7.3.6**
Znaleźć błąd w poniższym rozumowaniu. Dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mamy

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{\cos x} & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} & g(x) = -\cos x \end{array}} \quad = -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Stąd $0 = -1$.

HUMOR

Z pracy egzaminacyjnej studentki:

„Całując przez części ... otrzymałam".

● **Fakt* 7.3.7** *(wzory rekurencyjne dla całek $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$)*

1. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,\ n \geqslant 2.$

2. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,\ n \geqslant 2.$

○ **Ćwiczenie* 7.3.8**
Wykorzystując powyższe wzory rekurencyjne obliczyć podane całki:

a) $\int \sin^2 x\,dx$; b) $\int \sin^3 x\,dx$; c) $\int \cos^4 x\,dx$; d) $\int \cos^5 x\,dx$.

Obliczyć te całki wykorzystując wzory Eulera*.

---
*Leonard Euler (1707–1783), matematyk i fizyk szwajcarski.

● **Fakt 7.3.9** *(wzór rekurencyjny dla całek $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$)*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad \text{gdzie } n \geqslant 2.$$

○ **Ćwiczenie 7.3.10**
Wykorzystując powyższy wzór rekurencyjny obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

● **Twierdzenie 7.3.11** *(o całkowaniu przez podstawienie)*
Jeżeli

1. funkcja $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ jest ciągła na przedziale I,
2. funkcja $\varphi : J \longrightarrow I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J,

to

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 7.3.12**
Stosując wskazane podstawienia obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int (2x-5)^7\, dx,\ x = \frac{t+5}{2},\ t \in \boldsymbol{R}$; b) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\, dx,\ x = 2\sin t,\ |t| < \frac{\pi}{2}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}},\ x = (t-2)^2,\ t \geqslant 2$; d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}},\ x = \frac{1}{t},\ t < 0$;

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}},\ x = \ln\left(t^2-1\right),\ t > 1$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}\, dx}{1+\sqrt[3]{x}},\ x = t^6,\ t \geqslant 0$.

○ **Ćwiczenie 7.3.13**
Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int \frac{x^7\, dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$; b) $\displaystyle\int \cos^7 x\, dx$; c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$; e) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(1-x)^{12}}$; f) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\, dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2+5}$; h*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; i*) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

○ **Ćwiczenie 7.3.14**
Stosując odpowiednie podstawienie uzasadnić wzór rekurencyjny:

(♣) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}},$$

gdzie $a > 0$ oraz $n \geqslant 2$.

Ważniejsze całki zawierające funkcje hiperboliczne*

Wzór	Zakres zmienności
$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln \lvert \operatorname{sh} x \rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \left\lvert \operatorname{th} \frac{x}{2} \right\rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg} e^x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \operatorname{sh}^2 x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$

7.4 Całkowanie funkcji wymiernych

• **Definicja 7.4.1** *(funkcja wymierna właściwa)*

Funkcję wymierną $W(x) = \dfrac{L(x)}{M(x)}$ nazywamy właściwą, gdy stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Uwaga. Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

○ **Ćwiczenie 7.4.2**

Podane funkcje wymierne zapisać w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

a) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$; b) $\dfrac{x^3+2}{x+1}$; c) $\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$; d) $\dfrac{x^6}{x^2+2x+2}$.

• **Definicja 7.4.3** *(ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju)*

1. Funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{A}{(x+a)^n},$$

gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ oraz $a, A \in \boldsymbol{R}$, nazywamy ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

2. Funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ oraz $p, q, P, Q \in \boldsymbol{R}$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$, nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

● **Twierdzenie 7.4.4** *(o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)*
Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista jest sumą ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. Funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$

jest sumą $k_1+k_2+\ldots+k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1+l_2+\ldots+l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

• czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant r$,

• a czynnikowi $\left(x^2 + p_jx + q_j\right)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \ldots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j} \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant j \leqslant s$.

○ **Ćwiczenie 7.4.5**
Podać rozkłady na ułamki proste wskazanych funkcji wymiernych właściwych (nie obliczać współczynników rozkładów):

a) $\dfrac{x+1}{x^2(x-3)^5}$; b) $\dfrac{x^2}{(x^2-9)^3}$; c) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+4)^2}$;

d) $\dfrac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x-2)^3}$; e) $\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+2x+2)(x-10)^5}$; f) $\dfrac{x}{x^3+1}$.

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

Do obliczania całek z ułamków prostych pierwszegoo rodzaju stosujemy wzory:

(♡) $$\int \frac{A\,dx}{x+a} = A\ln|x+a| + C,$$

(♠) $$\int \frac{A\,dx}{(x+a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad \text{gdzie } n \geqslant 2.$$

○ **Ćwiczenie 7.4.6**
Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych pierwszego rodzaju obliczyć całki:

a) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$; b) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$; c) $\int \frac{2x+4\,dx}{x^3-2x^2}$;

d) $\int \frac{dx}{x\left(x^2-1\right)}$; e) $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^3}$; f) $\int \frac{\left(2x^2+3\right)\,dx}{x(x-1)^2}$;

g) $\int \frac{\left(2x^2-2x-1\right)\,dx}{x^3-x^2}$; h) $\int \frac{dx}{[(x-1)x]^2}$; i) $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Do obliczania całek z ułamków prostych drugiego rodzaju stosujemy wzór:

$$(\diamondsuit)\quad \int \frac{(Px+Q)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \frac{P}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \left(Q-\frac{Pp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}.$$

Pierwszą z tych całek obliczamy za pomocą podstawienia $t = x^2+px+q$, a drugą, po sprowadzeniu trójmianu x^2+px+q do postaci kanonicznej

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

i podstawieniu $t = x+\frac{p}{2}$, za pomocą wzoru ($\clubsuit$) z **Ćwiczenia 7.3.14**.

○ Ćwiczenie 7.4.7

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych drugiego rodzaju obliczyć całki:

a) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$; b) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+2x+2}$; c) $\int \frac{\left(x^3+3x^2+x+9\right)\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$;

d) $\int \frac{\left(x^3+x^2+x+2\right)\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}$; e) $\int \frac{\left(x^2+1\right)\,dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$; f) $\int \frac{\left(x^4+2x^2+4\right)\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Funkcję wymierną zapisujemy w postaci sumy wielomianu (być może zerowego) i funkcji wymiernej właściwej.
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne.
3. Zapisujemy rozkład (teoretyczny) funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Znajdujemy nieznane współczynniki tego rozkładu.
5. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji wymiernej, tj. wielomianu i ułamków prostych:
   a) dla ułamków pierwszego rodzaju wykorzystujemy wzór ($\heartsuit$) lub ($\spadesuit$),
   b) dla ułamków drugiego rodzaju wykorzystujemy wzór ($\diamondsuit$) oraz ewentualnie wzór rekurencyjny ($\clubsuit$) z **Ćwiczenia 7.3.14**.

○ **Ćwiczenie 1.4.8**

Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+2}$; b) $\displaystyle\int \frac{(x^2-4)\,dx}{x-1}$; c) $\displaystyle\int \frac{(3x^2-10)\,dx}{x^2-4x-4}$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$; e) $\displaystyle\int \frac{(x^4+6x^3+10x^2+x)\,dx}{x^2+6x+10}$; f) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$;

g) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x^4-8)\,dx}{x^3-4x}$; h) $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^4-1}$; i) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+x-2)^2}$.

HUMOR

Na egzaminie student przeprowadził następujące obliczenia:

$$\int \frac{dx}{x^2+x} = \frac{1}{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}}.$$

Na pytanie egzaminatora: „Czy to na pewno jest dobrze?” - odpowiedział: „Oczywiście, że nie. Brakuje jeszcze stałej całkowania”.

1.5 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

● **Definicja 1.5.1** *(funkcja wymierna dwóch zmiennych)*

Funkcję, którą można przedstawić w postaci ilorazu wielomianów dwóch zmiennych, nazywamy funkcją wymierną dwóch zmiennych.

● **Przykład 1.5.2**

Funkcje: $\dfrac{u^2-v^2}{2uv}$, $\dfrac{2u^3-uv^2+4u^5}{u+v^2+2}$, $\dfrac{1}{u+v}$, $uv+v^2$ są funkcjami wymiernymi dwóch zmiennych.

Całkowanie funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$

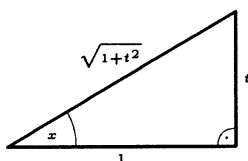
Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Wówczas do obliczania całek postaci

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

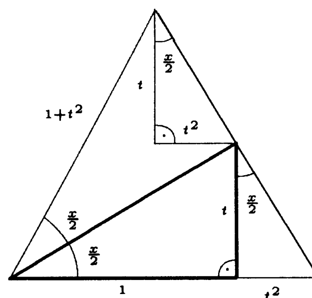
w zależności od warunków jakie spełnia funkcja R, stosujemy podstawienia z tabeli:

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(-u,v) = -R(u,v)$	$t = \cos x$	$\sin x = \sqrt{1-t^2}$	$dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(u,-v)=-R(u,v)$	$t=\sin x$	$\cos x=\sqrt{1-t^2}$	$dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
$R(-u,-v)=R(u,v)$	$t=\operatorname{tg} x$	$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$dx=\frac{dt}{1+t^2}$
R - dowolna funkcja	$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ podstawienie uniwersalne	$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$



Podstawienie $t=\operatorname{tg} x$



Podstawienie $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Rys. 7.5.1. Trójkąty ułatwiające zapamiętanie podstawień trygonometrycznych.

○ Ćwiczenie 1.5.3

Korzystając z podstawień podanych w powyższej tabeli obliczyć całki:

a) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$; b) $\int\frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x}$; c) $\int\frac{dx}{1+4\cos x}$;

d) $\int\frac{(2\sin x+3\cos x)\,dx}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}$; e) $\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$; f) $\int\frac{\operatorname{tg} 2x\,dx}{\operatorname{tg} x}$.

HUMOR

Fragment pracy egzaminacyjnej:

$$\int tgt\,dt=g\int t^2\,dt=\frac{gt^3}{3}+C,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a C dowolną stałą.

Całki z ważniejszych funkcji trygonometrycznych

Wzór	Zakres zmienności
$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$x \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$x \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$x \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

Całkowanie funkcji postaci $\sin ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$

Do obliczania całek z funkcji postaci:

$$\sin ax \cos bx, \quad \sin ax \sin bx, \quad \cos ax \cos bx$$

stosujemy tożsamości trygonometryczne:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right].$$

○ **Ćwiczenie 1.5.4**

Wykorzystując powyższe tożsamości obliczyć podane całki:

a) $\int \sin 2x \cos 4x\,dx$; b) $\int \sin x \sin 3x\,dx$;

c) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$; d*) $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

1.6 Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Całki postaci $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) dx$

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Do obliczania całek:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx,$$

gdzie $a > 0$, stosujemy podstawienia podane w tabeli:

Funkcja podcałkowa	Podstawienie	Postać pierwiastka	Różniczka
$R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$	$x = a\sin t$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$	$dx = a\cos t\,dt$
$R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$	$x = a\,\mathrm{ch}\,t$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$	$dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$
$R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)$	$x = a\,\mathrm{sh}\,t$	$\sqrt{x^2 + a^2} = a\,\mathrm{ch}\,t$	$dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$

○ **Ćwiczenie 1.6.1**

Wykorzystując powyższe podstawienia obliczyć całki:

a) $\int x\sqrt{4 - x^2}\,dx$; b) $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx$.

Ważniejsze całki z niewymiernościami

Wzór	Założenia
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\lvert x\rvert < a$
$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$	$\lvert x\rvert \geqslant a$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$	$x \in \boldsymbol{R}$

Wzór	Założenia
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$	$\|x\| > a$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	$\|x\| \leqslant a$

7.7 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 7.3.4** *(o całkowaniu przez części)*
Niech funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I. Wtedy mamy

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

Całkując obustronie powyższą równość na przedziale I otrzymamy

$$f(x)g(x) + C = \int \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right] dx.$$

Korzystając teraz z liniowości całki nieoznaczonej otrzymamy

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx + C,$$

co w równoważny sposób można zapisać w postaci

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

gdyż stała C występuje w całkach nieoznaczonych po obu stronach równości.

7.8 Odpowiedzi i wskazówki

7.1.3 a) $-\cos x + C$; **b)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$; **c)** $\ln(-x) + C$.

7.2.4 a) $\frac{1}{6}x^6 + C$; **b)** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; **c)** $-\frac{1}{3x^3} + C$; **d)** $\frac{4^x}{\ln 4} + C$; **e)** $3\sqrt[3]{x} + C$; **f)** $-\frac{1}{3^x \ln 3} + C$; **g)** $2\sqrt{x} + C$; **h)** $5\sqrt[5]{x} + C$.

7.2.5* a) $2\sqrt{x}$; **b)** $x - \frac{x^2}{2}$; **c)** $\ln x$.

7.3.2 a) $\frac{x^2}{2} - 2e^x + C$; **b)** $x - \frac{24}{5}x^{\frac{5}{6}} + 6x^{\frac{2}{3}} + C$; **c)** $-\operatorname{ctg} x - x + C$; **d)** $\frac{\left(\frac{3}{25}\right)^x}{\ln\frac{3}{25}} + C$; **e)** $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$; **f)** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$; **g)** $x - \operatorname{arctg} x + C$; **h)** $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$; **i)** $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

7.3.3 a) $\begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x + C \text{ dla } x < 3 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + 9 + C \text{ dla } x \geqslant 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \cos x + C \text{ dla } x < 0 \\ 2 - \cos x + C \text{ dla } x \geqslant 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + C \text{ dla } x < -1 \\ x + \dfrac{2}{3} + C \text{ dla } -1 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{3} + C \text{ dla } x \geqslant 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \vdots \\ -\cos x - 4 + C \text{ dla } -2\pi \leqslant x < -\pi \\ \cos x - 2 + C \text{ dla } -\pi \leqslant x < 0 \\ -\cos x + C \text{ dla } 0 \leqslant x < \pi \\ \cos x + 2 + C \text{ dla } \pi \leqslant x < 2\pi \\ -\cos x + 4 + C \text{ dla } 2\pi \leqslant x < 3\pi \\ \cos x + 6 + C \text{ dla } 3\pi \leqslant x < 4\pi \\ \vdots \end{cases}$

7.3.5 **a)** $\sin x - x\cos x + C$; **b)** $-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C$; **c)** $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)+C$; **d)** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$; **e)** $\frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arcctg} x + x - \operatorname{arctg} x\right)+C$; **f)** $\frac{3^x}{1+\ln^2 3}(\sin x + \ln 3 \cos x)+C$; **g*)** $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$; **h*)** Wskazówka. Zastosować liczby zespolone lub założyć, że całka ma postać $(ax+b)e^x\sin x + (cx+d)e^x\cos x$ i obliczyć nieznane współczynniki, $\frac{e^x}{2}\left[x(\sin x - \cos x) + \cos x\right]+C$.

7.3.6 Równość $0=-1$ jest poprawna dla całek. Oznacza ona równość dwóch klas funkcji stałych reprezentowanych przez funkcje tożsamościowo równe 0 oraz -1.

7.3.8 **a)** $-\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x + C$; **b)** $-\frac{1}{3}\left(2+\sin^2 x\right)\cos x + C$; **c)** $\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$; **d)** $\frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x\cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + C$.

7.3.10 **a)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$; **b)** $\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + C$; **c)** $\frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + \frac{5x}{16(1+x^2)} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} + \frac{x}{6(1+x^2)^3} + C$.

7.3.12 **a)** $\frac{1}{16}(2x-5)^8 + C$; **b)** $2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + C$; **c)** $4+2\sqrt{x} - 4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C$; **d)** $\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}+C$; **e)** $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$; **f)** $\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{3}\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$.

7.3.13 **a)** $\frac{1}{8}\arcsin x^8 + C$; **b)** $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$; **c)** $\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x + C$; **d)** $\frac{1}{3}\ln\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}+C$; **e)** $\frac{1}{11(1-x)^{11}} - \frac{1}{10(1-x)^{10}} + C$; **f)** $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C$; **g)** $\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}x + C$; **h*)** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; **i*)** $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$.

7.4.2 **a)** $1+\frac{x+1}{x^2}$; **b)** $x^2-x+1+\frac{1}{1+x}$; **c)** $x^2+\frac{x^2-1}{x^3-1}$; **d)** $x^4-2x^3+2x-4+\frac{8x+8}{x^2+2x+2}$.

7.4.5 **a)** $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2}+\frac{E}{(x-3)^3}+\frac{F}{(x-3)^4}+\frac{G}{(x-3)^5}$; **b)** $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}$; **c)** $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}+\frac{Dx+E}{x^2+4}+\frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$;

d) $\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{E}{x-2}+\frac{F}{(x-2)^2}+\frac{G}{(x-2)^3}$;

e) $\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{x-10}+\frac{D}{(x-10)^2}+\frac{E}{(x-10)^3}+\frac{F}{(x-10)^4}+\frac{G}{(x-10)^5}$;

f) $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

7.4.6 a) $-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C$; **b)** $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$;
c) $2\ln|x-2|-2\ln|x|+\frac{2}{x}+C$; **d)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|-\ln|x|+C$; **e)** $\ln|x+2|+\frac{2(2x+3)}{(x+2)^2}+C$;
f) $\frac{-5}{x-1}+3\ln|x|-\ln|x-1|+C$; **g)** $3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x}+C$;
h) $2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+\frac{2x-1}{x(1-x)}+C$; **i)** $-\frac{1}{2(x^2-1)}+C$.

7.4.7 a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}+C$; **b)** $\operatorname{arctg}(x+1)+\ln\left(x^2+2x+2\right)+C$;
c) $3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$; **d)** $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+C$;
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+3}+C$; **f)** $\frac{17}{8}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{8}\frac{x\left(3x^2+5\right)}{\left(x^2+1\right)^2}+C$.

7.4.8 a) $\frac{1}{2}x^2-2x+6\ln|x+2|+C$; **b)** $\frac{1}{2}x^2-x-3\ln|x-1|+C$;
c) $3x+\left(6-\frac{13\sqrt{2}}{4}\right)\ln\left(x+2\sqrt{2}-2\right)+\left(6+\frac{13\sqrt{2}}{4}\right)\ln\left(x-2\sqrt{2}-2\right)+C$;
d) $\frac{1}{2}x^2+3x-\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$; **e)** $\frac{1}{3}x^2-3\operatorname{arctg}(x+3)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+10\right)+C$;
f) $x+8\operatorname{arctg}(x-3)+3\ln\left(x^2-6x+10\right)+C$;
g) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+C$; **h)** $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;
i) $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{27}\ln|x-1|+\frac{176}{27}\ln|x+2|-\frac{1}{9(x-1)}+\frac{32}{9(x+2)}+C$.

7.5.3 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$; **b)** $-\frac{1}{3}\sin^3x-\sin x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+C$;
c) $\frac{1}{3\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+C$; **d)** $\ln\left(\operatorname{tg}^2x+9\right)+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{3}+C$;
e) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$; **f)** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C$.

7.5.4 a) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$; **b)** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$; **c)** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$;
d*) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$.

7.6.1 a) $-\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+C$; **b)** $\sqrt{1+x^2}-2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$;
c) $\sqrt{x^2-9}-3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}+C$.

8

CAŁKI OZNACZONE

8.1 Definicje i oznaczenia

• **Definicja 8.1.1** *(podział odcinka)*

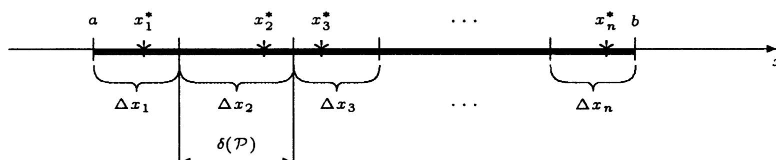
Podziałem odcinka $[a, b]$ na n części, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy zbiór

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

przy czym $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Oznaczenia stosowane w definicji całki

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – długość k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$;
$\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ – średnica podziału $\mathcal{P}$;
$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ – punkt pośredni k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$.



Rys. 8.1.1. Podział odcinka.

○ **Ćwiczenie 8.1.2**

Znaleźć współrzędne punktów podziału $\mathcal{P}$, długość k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$ oraz średnicę tego podziału, jeżeli:

a) $\mathcal{P}$ jest podziałem odcinka $[1, 2]$ na $n = 10$ równych części;

b) $\mathcal{P}$ jest podziałem odcinka $[2, 3]$ na $n = 6$ części dokonanym w ten sposób, że punkty podziału tworzą ciąg geometryczny.

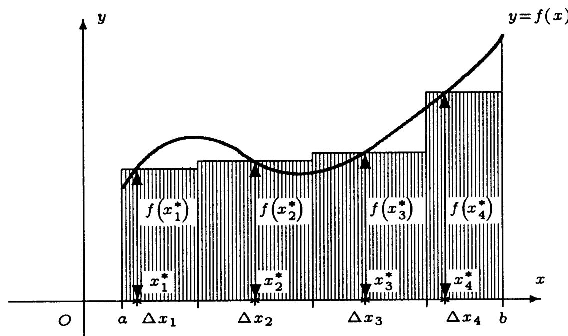
• **Definicja 8.1.3** *(suma całkowa)*

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz

punktom pośrednim x_k^*, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$, tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f,\mathcal{P}) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k.$$

Na rysunku 8.1.2 podano interpretację geometryczną sumy całkowej dla podziału odcinka $[a,b]$ na $n = 4$ części. Suma całkowa jest przybliżeniem pola obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x) \geqslant 0$, osią Ox i prostymi $x = a$, $x = b$ przez sumę pól prostokątów o podstawach Δx_k i wysokościach $f\left(x_k^*\right)$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$.



Rys. 8.1.2. Suma całkowa funkcji.

○ **Ćwiczenie 8.1.4**

Napisać sumy całkowe dla podanych funkcji, przedziałów i ich podziałów oraz dla wskazanych sposobów wyboru punktów pośrednich podziału:

a) $f(x) = x$, $[0,1]$, podział równomierny na n części, punkt pośredni x_k^* jest lewym końcem k-tego odcinka podziału, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$;

b) $f(x) = x^2$, $[-1,0]$, podział równomierny na 10 części, punkt pośredni x_k^* jest środkiem k-tego odcinka podziału, gdzie $1 \leqslant k \leqslant 10$;

c) $f(x) = 2^x$, $[1,3]$, podział równomierny na 8 części, punkt pośredni x_k^* jest prawym końcem k-tego odcinka podziału, gdzie $1 \leqslant k \leqslant 8$.

● **Definicja 8.1.5** *(całka oznaczona Riemanna)*

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k,$$

o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziałów $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich

x_k^*, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} 0 \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dla } a < b.$$

Funkcję, dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a,b]$, nazywamy funkcją całkowalną na $[a,b]$. Zamiast symbolu $\int_a^b f(x)\,dx$ można pisać

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \quad \text{lub krótko} \quad \int_a^b f \quad \text{albo też} \quad \int_{[a,b]} f.$$

Uwaga. Każda funkcja całkowalna jest ograniczona, ale nie każda funkcja ograniczona na przedziale jest na nim całkowalna. Przykładem takiej funkcji jest funkcja Dirichleta (**Definicja 0.12.6**) rozważana na przedziale $[0,1]$.

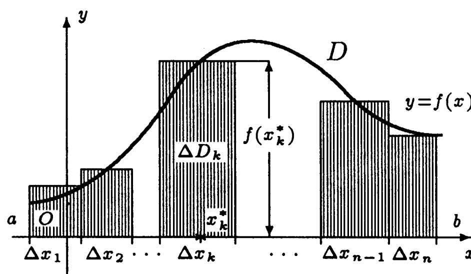
8.2 Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

1. Pole trapezu krzywoliniowego

Niech D oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem ciągłej nieujemnej funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Pole $|D|$ trapezu krzywoliniowego jest granicą sumy pól prostokątów ΔD_k aproksymujących ten trapez, gdy średnica podziału $\delta(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$ (rys. 8.2.1).

$$|D| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta D_k| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Gdy wykres funkcji f leży pod osią Ox, wtedy przyjmujemy, że pole trapezu D jest ujemne.

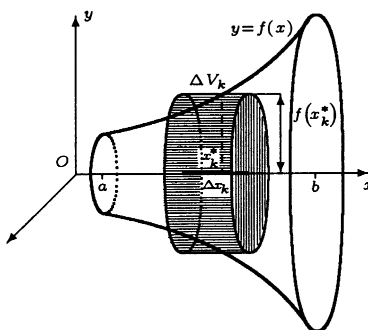


Rys. 8.2.1. Pole trapezu krzywoliniowego.

2. Objętość bryły obrotowej

Niech V oznacza bryłę ograniczoną powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji nieujemnej $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, wokół osi Ox oraz płaszczyznami $x = a$, $x = b$. Objętość $|V|$ bryły jest granicą sumy objętości walców ΔV_k aproksymujących tę bryłę, gdy średnica podziału $\delta(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$ (rys. 8.2.2).

$$|V| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta V_k| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2\left(x_k^*\right) \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



Rys. 8.2.2. Objętość bryły obrotowej.

○ **Ćwiczenie 8.2.1**

a) Wyprowadzić wzór na długość wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, której pochodna jest funkcją ciągłą.

b*) Wyprowadzić wzór na pole powierzchni powstałej z obrotu wokół osi Ox wykresu nieujemnej funkcji $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, której pochodna jest funkcją ciągłą.

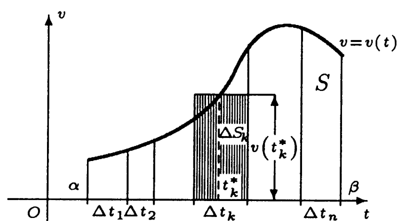
8.3 Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Droga przebyta w ruchu zmiennym

Niech S oznacza drogę przebytą w przedziale czasowym $[\alpha, \beta]$ przez punkt poruszający się ze zmienną szybkością $v(t)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$. Droga S jest granicą sumy dróg elementarnych ΔS_k przebytych przez punkt w czasie Δt_k z szybkością stałą $v\left(t_k^*\right)$, gdy $\delta(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$.

$$S = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} v\left(t_k^*\right) \Delta t_k = \int_\alpha^\beta v(t)\, dt.$$

Droga S jest polem trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresem funkcji v, osią Ot oraz prostymi $t = \alpha$, $t = \beta$ (rys. 8.3.1).



Rys. 8.3.1. Droga przebyta w ruchu zmiennym.

○ **Ćwiczenie 8.3.1**

a) Korzystając z definicji całki oznaczonej wyprowadzić wzór ma moment bezwładności jednorodnego kawałka cienkiej blachy o masie M i kształcie prostokąta o bokach a i b. Moment bezwładności obliczyć względem boku o długości b.

b) Korzystając z definicji całki oznaczonej wyprowadzić wzór na siłę $\vec{F}$, z jaką jednorodny cienki pręt o masie M i długości l przyciąga masę punktową m położoną na przedłużeniu pręta w odległości d od jego końca.

● **Definicja 8.3.2** *(całka oznaczona z funkcji wektorowej)*

Niech $\vec{F}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ będzie funkcją wektorową określoną na przedziale $[a,b]$, gdzie funkcje x i y są całkowane na tym przedziale. Całkę oznaczoną z funkcji wektorowej $\vec{F}$ na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem

$$\int\limits_a^b \vec{F}(t)\,dt \overset{def}{=} \left(\int\limits_a^b x(t)\,dt, \int\limits_a^b y(t)\,dt\right).$$

Uwaga. Podobnie określa się całkę z funkcji wektorowej $\vec{F}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

○ **Ćwiczenie 8.3.3**

Prędkość punktu materialnego w chwili t wyraża się wzorem $\vec{v} = (1, \cos t, \sin t)$. W chwili $t = 0$ punkt ten znajdował się w początku układu współrzędnych. Znaleźć jego położenie w chwili $t = \pi$.

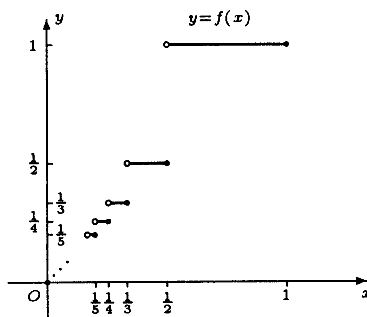
8.4 Podstawowe twierdzenia

● **Twierdzenie 8.4.1** *(warunek wystarczający całkowalności funkcji)*

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja ciągła na przedziale jest na nim całkowalna. Z drugiej strony funkcja całkowalna na przedziale może mieć nieskończenie wiele punktów nieciągłości. Przykładem takiej funkcji jest

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla}\, x = 0, \\ \left[E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{-1} & \text{dla}\, 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



Rys. 8.4.1. Funkcja całkowalna z nieskończoną liczbą punktów nieciągłości.

Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[0,1]$, ale w punktach $x = \frac{1}{n}$, gdzie $n \geqslant 2$, jest nieciągła (rys. 8.4.1).

- **Fakt 8.4.2** *(obliczanie całek przy pomocy sumy całkowej podziału równomiernego)*

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Uwaga. Istnienie powyższej granicy nie gwarantuje całkowalności funkcji f. Np. dla funkcji $f(x) = D(x)$ (funkcja Dirichleta) i przedziału $[0,1]$ granica ta jest równa 0, ale funkcja f nie jest całkowalna na tym przedziale.

○ **Ćwiczenie 8.4.3**

Korzystając powyższego faktu obliczyć podane całki:

a) $\int_{-1}^{3} 2\,dx$; b) $\int_{0}^{2} x\,dx$; c) $\int_{1}^{4} (1-3x)\,dx$; d) $\int_{0}^{1} x^2\,dx$;

e) $\int_{-1}^{0} e^x\,dx$; f*) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; g*) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$; h*) $\int_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$.

- **Twierdzenie 8.4.4** *(Newtona* - Leibniza, I główne twierdzenie rachunku całkowego)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na tym przedziale.

---

*Sir Izaak Newton (1642–1727), matematyk, fizyk i astronom angielski.

Uwaga. Zamiast $F(b)-F(a)$ będziemy pisali $F(x)\Big|_a^b$ lub $\left[F(x)\right]_a^b$.

○ **Ćwiczenie 8.4.5**

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć podane całki:

a) $\int\limits_0^1 \left(x^3+3x+1\right)dx$; b) $\int\limits_{-1}^2 e^{-x}\,dx$; c) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$;

e) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$; f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$; g) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$; h) $\int\limits_8^{27} \sqrt[3]{x}\,dx$.

○ **Ćwiczenie 8.4.6**

Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}=\frac{1}{5}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n}}{n}=\frac{2\ln 2}{\pi}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^1}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n}=e-1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\right)=\ln\frac{3}{2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$; f*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

● **Twierdzenie 8.4.7** *(o liniowości całki oznaczonej)*

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a,b]$, to

1. $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

2. $\int\limits_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx-\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

3. $\int\limits_a^b \big(cf(x)\big)\,dx=c\int\limits_a^b f(x)\,dx$, gdzie $c\in\boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 8.4.8**

Obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-5\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; c) $\int\limits_0^8 \left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

8.5 Metody obliczania całek oznaczonych

● **Twierdzenie 8.5.1** *(o całkowaniu przez części)*

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

○ **Ćwiczenie 8.5.2**

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$; b) $\int_0^{\ln 3} xe^{-x}\,dx$; c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$;

d) $\int_0^1 e^x\sin\pi x\,dx$; e) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$; f) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,dx$.

● **Twierdzenie 8.5.3** *(o całkowaniu przez podstawienie)*

Jeżeli

1. funkcja $\varphi : [\alpha,\beta] \xrightarrow{na} [a,b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha,\beta]$,
2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
3. funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$,

to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt.$$

Uwaga. W przypadku gdy funkcja φ jest rosnąca, ostatni wzór można zapisać w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt.$$

○ **Ćwiczenie 8.5.4**

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; c) $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$;

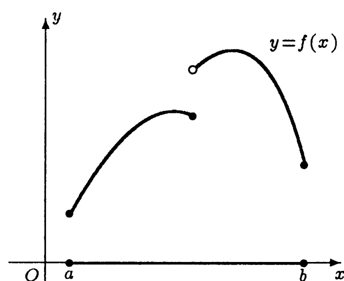
d) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; e) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; f) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

8.6 Własności całki oznaczonej

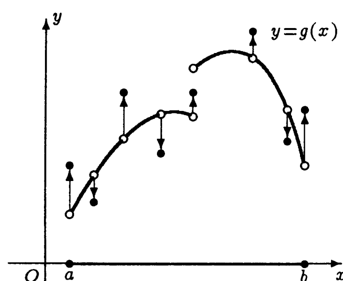
• **Twierdzenie 8.6.1** *(o równości całek)*

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g także jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$



Rys. 8.6.1. Wykres funkcji f.



Rys. 8.6.2. Wykres funkcji g.

○ **Ćwiczenie 8.6.2**

Korzystając z powyższego twierdzenia obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^{100} g(x)\,dx$, gdzie $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \notin \mathbf{N}, \\ 2 \text{ dla } x \in \mathbf{N}; \end{cases}$

b) $\int\limits_{-2}^{10} g(x)\,dx$, gdzie $g(x) = \begin{cases} x \ \text{ dla } x \notin \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{x} \text{ dla } x \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$

• **Twierdzenie 8.6.3** *(addytywność całki względem przedziałów całkowania)*

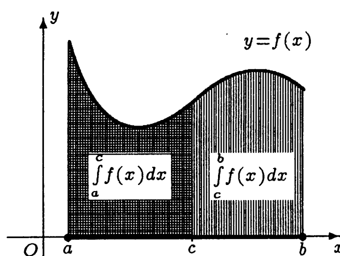
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz $c \in (a,b)$, to

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

○ **Ćwiczenie 8.6.4**

Obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_{-1}^{3} |x-2|\,dx$; b) $\int\limits_{-2}^{2} |x|e^{|x-1|}\,dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{9}{2}} E(x)\,dx$; d) $\int\limits_0^{10\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.



Rys. 8.6.3. Ilustracja twierdzenia o addytywności całki względem przedziałów całkowania.

● **Twierdzenie 8.6.5** *(o zachowaniu nierówności przy całkowaniu)*

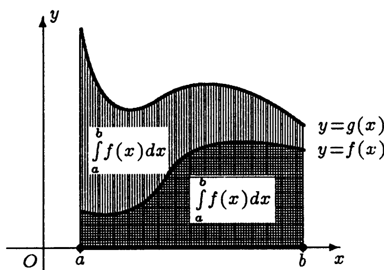
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. są całkowalne na przedziale $[a, b]$,
2. $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$,

to

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Uwaga*. Jeżeli nierówność w założeniu twierdzenia jest ostra, to także nierówność w tezie jest ostra.



Rys. 8.6.4. Ilustracja twierdzenia o zachowaniu nierówności przy całkowaniu.

○ **Ćwiczenie 8.6.6**

Korzystając z twierdzenia o zachowaniu nierówności przy całkowaniu porównać całki:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x};$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}};$

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx, \quad \int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx;$ d*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^3+11x^2+19x+25}}.$

○ Ćwiczenie 8.6.7

Uzasadnić, że jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ spełnia nierówności $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to prawdziwe jest oszacowanie:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Podać interpretację geometryczną tego oszacowania.

○ Ćwiczenie 8.6.8

Korzystając z twierdzenia o zachowaniu nierówności przy całkowaniu uzasadnić podane nierówności:

a) $\dfrac{1}{20\sqrt{2}} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{19}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{20}$; b) $0 < \displaystyle\int_0^{200} \frac{e^{-5x}\,dx}{x+20} < 0{,}01.$

○ Ćwiczenie 8.6.9

Uzasadnić, że jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to prawdziwe jest oszacowanie

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx.$$

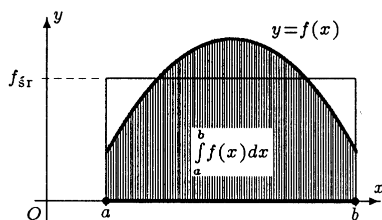
Podać interpretację geometryczną tego oszacowania.

● Definicja 8.6.10 *(wartość średnia funkcji)*

Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Wartością średnią funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$f_{\text{śr}} \overset{def}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Uwaga. Wartość średnia funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest wysokością prostokąta o podstawie długości $b - a$, którego pole jest równe polu trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$ (rys. 8.6.5).



Rys. 8.6.5. Wartość średnia funkcji.

○ **Ćwiczenie 8.6.11**

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$; b) $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $[-4, 4]$; d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $[0, 1]$.

○ **Ćwiczenie 8.6.12**

a) Punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z szybkością początkową $v_0 = 5$ m/s i z przyspieszeniem $a = 2$ m/s^2. Obliczyć średnią szybkość tego punktu w czasie pierwszych pięciu sekund ruchu.

b) Poziom wody w zbiorniku retencyjnym wyraża się (w metrach) wzorem przybliżonym

$$H(t) = 10 + 2 \sin \frac{\pi t}{24},$$

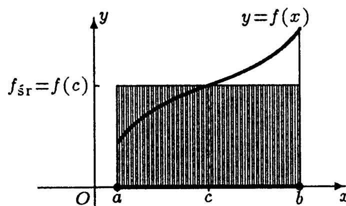
gdzie $0 \leqslant t \leqslant 24$, oznacza czas liczony w godzinach. Obliczyć średni poziom wody w tym zbiorniku w ciągu doby.

c*) Z punktu wybranego na okręgu o promieniu R poprowadzono wszystkie możliwe cięciwy. Obliczyć średnią długość tych cięciw.

■ **Twierdzenie 8.6.13** *(całkowe o wartości średniej funkcji)*

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\bigvee_{c \in (a,b)} f_{\text{śr}} = f(c), \quad \text{tzn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(c).$$



Rys. 8.6.6. Ilustracja twierdzenia całkowego o wartości średniej funkcji.

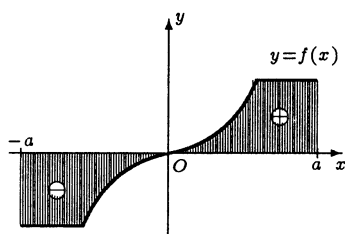
● **Fakt 8.6.14** *(całka funkcji nieparzystej, parzystej i okresowej)*

Jeżeli funkcja f jest całkowalna oraz:

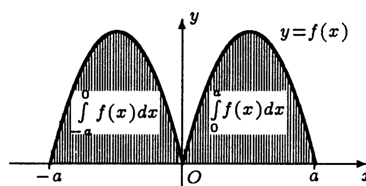
1. jest nieparzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

2. jest parzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \int_0^a f(x)\,dx$;

3. ma okres T, to $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.



Rys. 8.6.7. Całka z funkcji nieparzystej.



Rys. 8.6.8. Całka z funkcji parzystej.

○ **Ćwiczenie 8.6.15**
Wykorzystując własności całek podane wyżej uzasadnić równości:

a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx = 0$; b) $\int\limits_{-1}^{1} e^{x^2} \sin x\, dx = 0$;

c) $\int\limits_{-3}^{3} x \sin^3 x\, dx = 2\int\limits_{0}^{3} x \sin^3 x\, dx$; d) $\int\limits_{-\pi}^{3\pi} x \sin^2 x\, dx = \int\limits_{\pi}^{3\pi} x \sin^2 x\, dx$;

e) $\int\limits_{-10\pi}^{40\pi} |\sin x|\, dx = 50\int\limits_{0}^{\pi} |\sin x|\, dx$; f) $\int\limits_{-\pi}^{5\pi} \frac{\sin^5 x\, dx}{2+\cos x} = 0$;

g*) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin x \sin 3x \sin 5x \ldots \sin 2001x\, dx = 0.$

8.7 Twierdzenia podstawowe rachunku całkowego

● **Definicja 8.7.1** *(funkcja górnej granicy całkowania)*
Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech $c \in [a, b]$. Funkcję

$$F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(t)\, dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$, nazywamy funkcją górnej granicy całkowania.

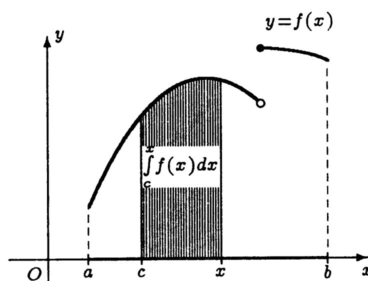
○ **Ćwiczenie 8.7.2**
Dla podanych funkcji całkowalnych na przedziale $[a, b]$, znaleźć funkcje górnej granicy całkowania $F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(t)\, dt$, gdzie $c \in [a, b]$:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ dla } x > 0, \end{cases}$ $[a, b] = [-1, 2]$, $c = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ dla } x \leqslant 0, \\ 1 + x \text{ dla } x > 0, \end{cases}$ $[a,b] = [-2,3]$, $c = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } x \leqslant 1, \\ 1 \text{ dla } 1 < x \leqslant 2, \\ 2 \text{ dla } 2 < x, \end{cases}$ $[a,b] = [0,3]$, $c = 0$.

Sporządzić wykresy funkcji f oraz F.

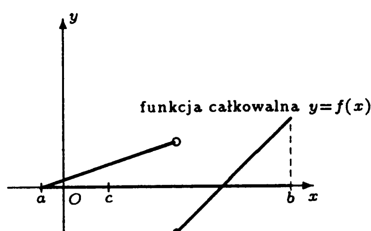


Rys. 8.7.1 Funkcja górnej granicy całkowania.

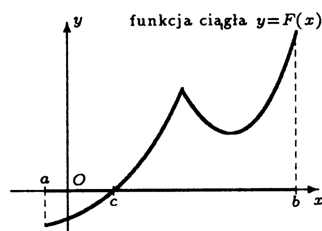
● **Twierdzenie 8.7.3** *(o ciągłości funkcji górnej granicy całkowania)*
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

gdzie $x \in [a, b]$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$.



Rys. 8.7.2. Wykres funkcji f.



Rys. 8.7.3. Wykres funkcji $y = \int_c^x f(x)\,dx$.

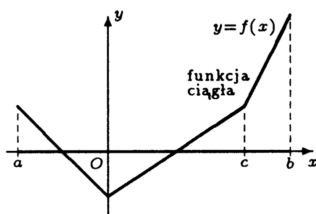
Uwaga. Operacja całkowania (ze zmienną granicą całkowania) przekształca funkcje całkowalne na przedziale w funkcje ciągłe na tym przedziale.

■ **Twierdzenie 8.7.4** *(II główne twierdzenie rachunku całkowego)*
Jeżeli funkcja f jest całkowana na przedziale $[a, b]$ oraz ciągła w punkcie x_0 tego przedziału, to funkcja

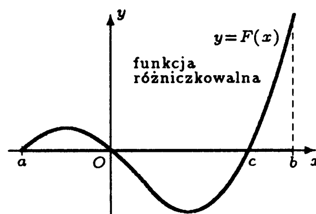
$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

gdzie $c \in [a, b]$, ma pochodną właściwą w punkcie x_0 oraz

$$F'(x_0) = f(x_0).$$



Rys. 8.7.4. Wykres funkcji f.



Rys. 8.7.5. Wykres funkcji $y = \int_c^x f(x)\,dx$.

Uwaga. Gdy $x_0 = a$ lub $x_0 = b$, to $F'(x_0)$ oznacza tu pochodną jednostronną. Operacja całkowania (ze zmienną granicą całkowania) przekształca funkcje ciągłe na przedziale w funkcje mające pochodną właściwą na tym przedziale. Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to F jest jej funkcją pierwotną.

○ **Ćwiczenie 8.7.5**
Dla podanych funkcji f ciągłych na przedziale $[a, b]$ znaleźć funkcje górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

gdzie $c \in [a, b]$ oraz sprawdzić, że $F'(x) = f(x)$:

a) $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$, $c = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ 1 - x & \text{dla } x > 0, \end{cases}$ $[a, b] = [-1, 2]$, $c = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \cos x & \text{dla } x > 0, \end{cases}$ $[a, b] = [-1, 2]$, $c = 0$.

Naszkicować wykresy funkcji f i F.

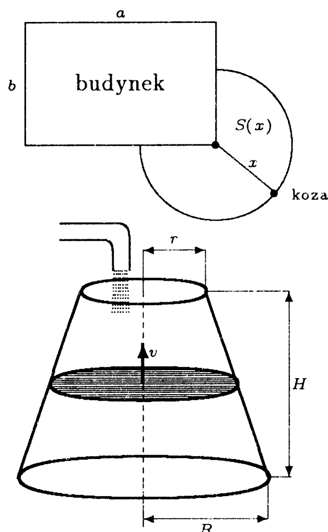
○ **Ćwiczenie* 8.7.6**
Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$; b) $G(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\,dt$.

○ **Ćwiczenie 8.7.7**

a) Koza jest przywiązana sznurkiem o długości x do rogu budynku o wymiarch a, b, gdzie $a > b$ (rysunek). Niech $S(x)$ oznacza pole pastwiska dostępnego dla kozy. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji S.

b) Naczynie ma kształt stożka ściętego o promieniach podstaw $r = 10\,\text{cm}$ i $R = 20\,\text{cm}$ oraz wysokości $H = 30\,\text{cm}$. Do naczynia wlewa się woda w ten sposób, że jej poziom cały czas podnosi się z prędkością $v = 2\,\text{cm/sek}$. Znaleźć wzór opisujący wydajność [cm^3/sek] kranu, z którego napełnia się zbiornik (rysunek).



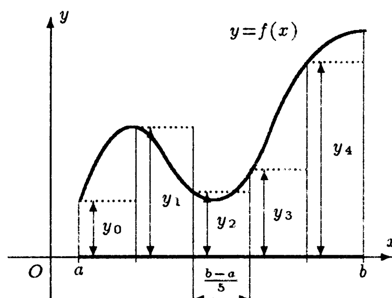
8.8 Przybliżone metody obliczania całek*

● **Fakt* 8.8.1** *(metoda prostokątów)*

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech $n \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

gdzie $y_k = f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ dla $0 \leqslant k \leqslant .n - 1$.



Rys. 8.8.1 Metoda prostokątów.

Uwaga*. Metoda prostokątów polega na przybliżaniu wykresu funkcją przedziałami stałą. Jeżeli funkcja f ma na przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną, to błąd δ_n

popełniony przy stosowaniu tej metody spełnia nierówność:

$$|\delta_n| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max\left\{|f'(x)| : x \in [a,b]\right\}.$$

○ **Ćwiczenie* 8.8.2**

Przy pomocy metody prostokątów obliczyć przybliżone wartości całek oznaczonych:

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,dx$, $n=4$; b) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$, $n=5$; c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}\,dx$, $n=6$.

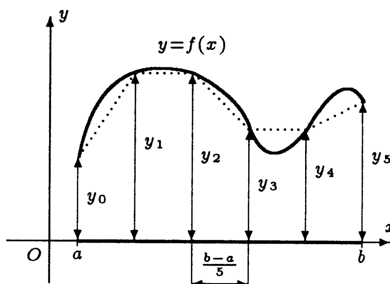
Porównać otrzymane wyniki z rzeczywistymi wartościami całek.

● **Fakt* 8.8.3** *(metoda trapezów)*

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz niech $n \geqslant 2$. Wtedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2} + (y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})\right],$$

gdzie $y_k = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$.



Rys. 8.8.2 Metoda trapezów.

Uwaga*. Metoda trapezów polega na przybliżaniu wykresu funkcji łamaną wpisaną w ten wykres. Jeżeli funkcja f ma na przedziale $[a,b]$ ciągłą drugą pochodną, to błąd δ_n popełniony przy stosowaniu tej metody spełnia nierówność:

$$|\delta_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max\left\{|f''(x)| : x \in [a,b]\right\}.$$

○ **Ćwiczenie* 8.8.4**

Przy pomocy metody trapezów obliczyć przybliżone wartości całek oznaczonych:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$, $n=4$; b) $\int\limits_0^2 x^3\,dx$, $n=6$; c) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$, $n=8$.

Porównać otrzymane wyniki z rzeczywistymi wartościami całek.

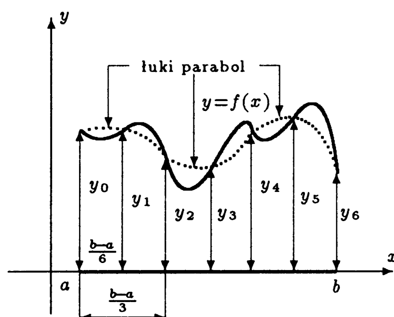
● **Fakt* 8.8.5** *(metoda parabol - wzór Simpsona*[†]*)*
Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech $n \geqslant 2$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_{2n}}{6}+\frac{y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}}{3}+\frac{2\left(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\right)}{3}\right],$$

gdzie $y_k = f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ dla $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

Uwaga*. Metoda parabol polega na przybliżaniu wykresu funkcji łukami parabol przechodzących przez wybrane punkty tego wykresu. Jeżeli funkcja f ma na przedziale $[a, b]$ ciągłą czwartą pochodną, to błąd δ_n popełniony przy stosowaniu tej metody spełnia nierówność:

$$|\delta_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max\left\{\left|f^{(4)}(x)\right| : x \in [a, b]\right\}.$$



Rys. 8.8.3 Metoda parabol.

○ **Ćwiczenie* 8.8.6**
Przy pomocy metody parabol obliczyć przybliżone wartości całek oznaczonych:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $2n = 10$; b) $\displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{\ln x}$, $2n = 8$; c) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt[3]{x^2-1}\,dx$, $2n = 6$.

8.9 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 8.6.13** *(całkowe o wartości średniej funkcji)*
Przy założeniu, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, z twierdzeń Weierstrassa (**Twierdzenia 3.4.1-2**) wynika, że jest ona ograniczona na tym przedziale oraz osiąga swoje kresy. Mamy zatem $m \leqslant f(x) \leqslant M$, gdzie $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ oraz $M = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Oczywiście oba kresy są osiągane w pewnych punktach przedziału

[†]Thomas Simpson (1710–1761), matematyk angielski.

$[a,b]$. Niech zatem np. $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$, gdzie $x_m, x_M \in [a,b]$. Z ciągłości funkcji f wynika jej całkowalność na przedziale $[a,b]$ (**Twierdzenie 8.4.1**). Korzystając teraz z własności zachowania nierówności przy całkowaniu (**Ćwiczenie 8.6.7**) otrzymamy

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Stąd

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Wartość średnia funkcji f na przedziale $[a,b]$ spełnia zatem nierówność

$$m \leqslant f_{\text{śr}} \overset{def}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ oraz w punktach x_m i x_M przyjmuje odpowiednio wartości m i M. Z własności Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich (**Twierdzenie 3.4.4**) wynika, że istnieje punkt $c \in [x_m, x_M] \subset [a,b]$, w którym spełniona jest równość $f(c) = f_{\text{śr}}$.

■ **Dowód Twierdzenia 8.7.4** *(II główne twierdzenie rachunku całkowego)*
Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$. Ponadto niech

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx, \text{ gdzie } c \in [a,b] \text{ oraz } x \in [a,b].$$

Rozważmy iloraz różnicowy funkcji F w punkcie x_0 odpowiedający przyrostowi $\Delta x \neq 0$. Mamy

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_c^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx - \int_c^{x_0} f(x)\,dx}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx}{\Delta x}.$$

Pokażemy, że

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0), \text{ tzn. } \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{\Delta x\in S(0,\delta)} f(x_0)-\varepsilon < \frac{\Delta F}{\Delta x} < f(x_0)+\varepsilon.$$

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 oznacza, że

$$\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x\in O(x_0,\delta)} f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon.$$

Z własności zachowania nierówności przy całkowaniu (**Ćwiczenie 8.6.7**) mamy

$$(f(x_0)-\varepsilon)\,\Delta x < \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx < (f(x_0)+\varepsilon)\,\Delta x.$$

Zatem
$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta F}{\Delta x} < f(x_0) + \varepsilon \text{ dla } 0 < |\Delta x| < \delta.$$
Ostatecznie $F'(x_0) = f(x_0)$.

8.10 Odpowiedzi i wskazówki

8.1.2 a) $\mathcal{P} = \left\{1 + \frac{k}{10} : k = 0, 1, 2, \ldots, 10\right\}$, $\Delta x_k = \frac{1}{10}$, $\delta(\mathcal{P}) = \frac{1}{10}$;

b) $\mathcal{P} = \left\{2q^k : k = 0, 1, 2, \ldots, 6\right\}$, gdzie $q = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, $\Delta x_k = 2q^{k-1}(q-1)$, $\delta(\mathcal{P}) = 3 - \frac{3}{q}$.

8.1.4 a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n}$; **b)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10}\left(\frac{2k-1}{20} - 1\right)^2$; **c)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^k$.

8.2.1 a) $|\Gamma| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$;

b) $|\Sigma| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k^*)\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

8.3.1 a) $I = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{M}{ab}\Delta x_k \cdot b\right)(x_k^*)^2 = \frac{M}{a}\int_0^a x^2\, dx$;

b) $|\vec{F}| = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{Gm\frac{M}{l}}{(x_k^*)^2}\Delta x_k = \frac{GmM}{l}\int_d^{d+l} \frac{dx}{x^2}$.

8.3.3 $(\pi, 0, 2)$.

8.4.3 a) 8; **b)** 2; **c)** $-19\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{1}{3}$; **e)** $1 - \frac{1}{e}$; **f*)** 1; **g*)** 1; **h*)** $\frac{38}{3}$.

8.4.5 a) $\frac{11}{4}$; **b)** $e - \frac{1}{e^2}$; **c)** 2; **d)** $\frac{\pi}{4}$; **e)** $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$; **f)** $\frac{1}{2}\ln 2$; **g)** 1; **h)** $\frac{195}{4}$.

8.4.6 Wskazówka. Pokazać, że granice są równe całkom:

a) $\int_0^1 x^4\, dx$; **b)** $\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$; **c)** $\int_0^1 e^x\, dx$; **d)** $\int_2^3 \frac{dx}{x}$; **e)** $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$; **f*)** $\int_0^1 \ln x\, dx$. Obliczyć najpierw logarytm granicy.

8.4.8 a) $-\frac{61}{3}$; **b)** $\frac{\pi}{4}$; **c)** $\frac{16}{5}$.

8.5.2 a) π; **b)** $\frac{2 - \ln 3}{3}$; **c)** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{\pi(e+1)}{\pi^2 + 1}$; **e)** $e - 2$; **f)** $\frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{3} + 1\right) + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

8.5.4 a) $\frac{4}{15}\left(1 + \sqrt{2}\right)$; **b)** $\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{e^4 - 1}{2}$; **d)** $2 - \frac{\pi}{2}$; **e)** π; **f)** $\frac{29}{270}$.

8.6.2 a) 100; **b)** 48.

8.6.4 a) 5; **b)** $e^3 + 3e - 2$; **c)** 8; **d)** 0.

8.6.6 a) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{dx}{x}$; b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; c) $\int_0^1 e^{-x} \sin x \, dx < \int_0^1 e^{-x^2} \sin x \, dx$;

d*) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} > \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^3+11x^2+9x+25}}$. Wskazówka. W drugiej całce podstawić $u = x+1$.

8.6.11 a) $\frac{2}{\pi}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{4}$.

8.6.12 a) $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $10 + \frac{4}{\pi}$ m; c*) $\frac{4}{\pi}R$.

8.7.2 a) $F(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x-1 & \text{dla } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$; b) $F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x + \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 < x \leqslant 3 \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-2 & \text{dla } 1 < x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{dla } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$.

8.7.5 a) $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$; b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sin x & \text{dla } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$.

8.7.6* a) $F(x) = 2x \sin|x|$; b) $G(x) = 3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}$.

8.7.7 a) Funkcja S jest ciągła na $[0, \infty)$. Pochodna tej funkcji nie istnieje w punktach $x = b$, $x = a$ oraz $x = a + b$; b) $V(t) = 8\pi\left(10 - \frac{t}{3}\right)^2$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 15$.

8.8.2* a) 0.595292 (wartość dokładna $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$); b) 0.436731 (wartość dokładna $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.570796$); c) 0.566524 (wartość dokładna 0.5).

8.8.4* a) 0.987112 (wartość dokładna 1); b) 4.11111 (wartość dokładna 4); c) 1.72050 (wartość dokładna $e - 1 \approx 1.7182818$).

8.8.6* a) 0.74682; b) 2.59355; c) 1.91851.

9

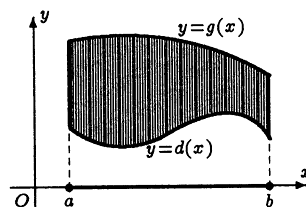
ZASTOSOWANIA CAŁEK OZNACZONYCH

9.1 Zastosowania w geometrii

● **Fakt 9.1.1** *(pole trapezu krzywoliniowego)*

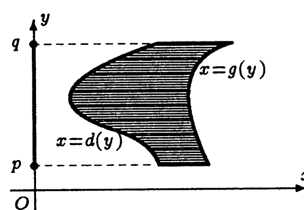
1. Niech funkcje d i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $d(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji d i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]\, dx.$$



2. Niech funkcje d i g będą ciągłe na przedziale $[p, q]$ oraz niech $d(y) \leqslant g(y)$ dla każdego $y \in [p, q]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji d i g oraz prostymi $y = p$, $y = q$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_p^q [g(y) - d(y)]\, dy.$$



Rys. 9.1.1. Trapezy krzywoliniowe.

○ **Ćwiczenie 9.1.2**

Obliczyć pola figur geometrycznych ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $y = x^4,\ y = 2 - x^2$;
b) $y = x^2 - 6x + 7,\ y = 3 - x$;
c) $y = \sqrt{3}\cos x,\ y = \sin x\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$;
d) $xy^2 = 1,\ xy^2 = 4,\ y = 1,\ y = 2$;
e) $y = -\sqrt{9 - x^2},\ y = 0$;
f*) $y = 2^x,\ y = x + 1$.

○ **Ćwiczenie* 9.1.3**

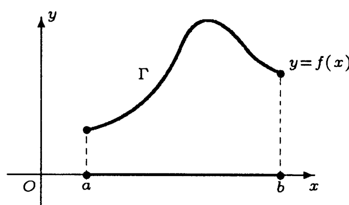
Uzasadnić równości:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx + \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4}$; b) $\int\limits_0^1 e^{x^2}\, dx + \int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\, dx = e$.

● **Fakt 9.1.4** *(długość krzywej)*

Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość krzywej $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Rys. 9.1.2. Krzywa o równaniu $y = f(x)$.

○ **Ćwiczenie 9.1.5**

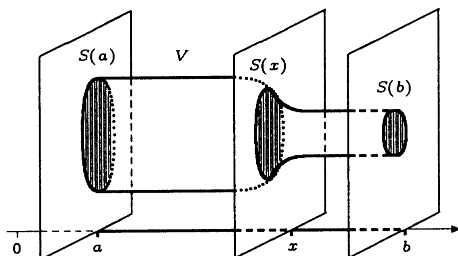
Obliczyć długości podanych krzywych:

a) $y = \ln x,\ \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$;
b) $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$;
c*) $y = \sqrt{x},\ 1 \leqslant x \leqslant 4$;
d) $y = \ln\cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

● **Fakt 9.1.6** *(objętość bryły)*

Niech $S(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi Ox w punkcie x oraz niech funkcja S będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły V wyraża się wzorem

$$|V| = \int\limits_a^b S(x)\, dx.$$



Rys. 9.1.3. Wyznaczanie objętości bryły na podstawie pól przekrojów.

○ **Ćwiczenie 9.1.7**

Korzystając z powyższego wzoru obliczyć objętości podanych brył:

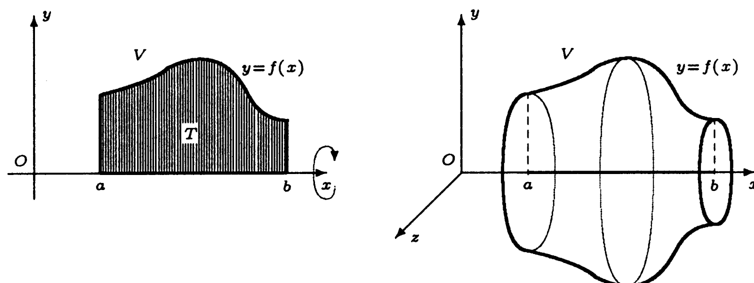
a) ostrosłup o polu podstawy P i wysokości H;

b) półkula o promieniu R.

● **Fakt 9.1.8** *(objętość bryły obrotowej)*

1. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Ponadto niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

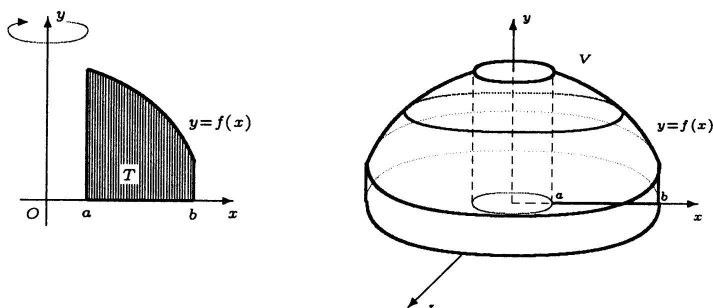
$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



Rys. 9.1.4. Bryła powstała z obrotu trapezu krzywoliniowego wokół osi Ox.

2. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Ponadto niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$



Rys. 9.1.5. Bryła powstała z obrotu trapezu krzywoliniowego wokół osi Oy.

○ **Ćwiczenie 9.1.9**

Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur T wokół wskazanych osi:

a) $T: \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \ Ox$; b) $T: \ 0 \leqslant x \leqslant 4, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}e^{-x}, \ Ox$;

c) $T: \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}, \ Oy$; d) $T: \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} x^2, \ Oy$.

○ **Ćwiczenie 9.1.10**

Korzystając ze wzoru na objętość bryły obrotowej obliczyć objętości podanych brył:

a) Kula o promieniu R;

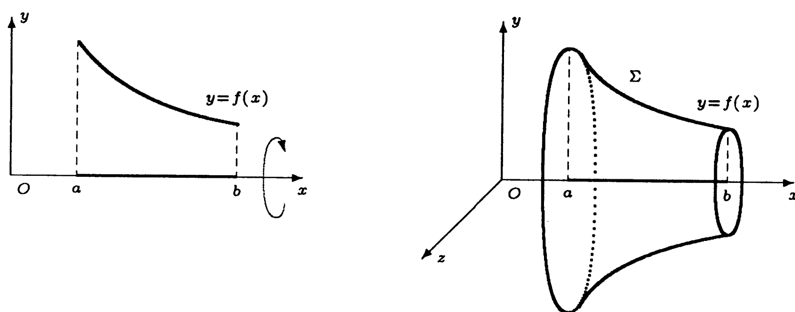
b) Stożek ścięty o promieniach podstaw r, R i wysokości H;

c) Odcinek paraboloidy obrotowej o wysokości b i promieniu podstawy a.

● **Fakt 9.1.11** *(pole powierzchni obrotowej)*

1. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

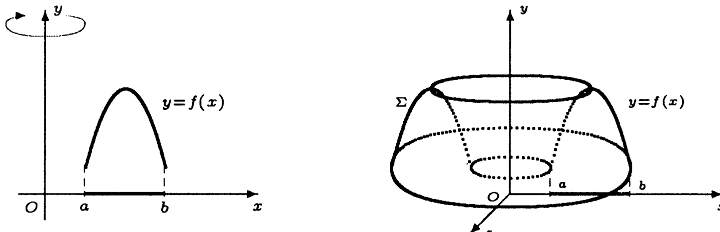
$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Rys. 9.1.6. Powierzchnia powstała z obrotu wykresu funkcji wokół osi Ox.

2. Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$, gdzie $a \geqslant 0$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Rys. 9.1.7. Powierzchnia powstała z obrotu wykresu funkcji wokół osi Oy.

○ **Ćwiczenie 9.1.12**

Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu podanych wykresów funkcji wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, oś Ox; b*) $f(x) = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, oś Ox;

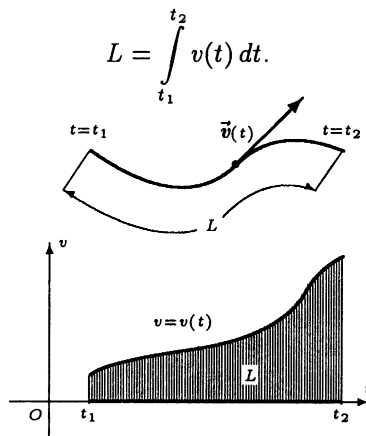
c) $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, oś Ox; d) $f(x) = 2x - 1$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, oś Oy.

9.2 Zastosowania w fizyce

● **Fakt 9.2.1** *(droga przebyta w ruchu zmiennym)*

Niech punkt materialny porusza się po płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną szybkością $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Wtedy droga przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$



Rys. 9.2.1. Droga przebyta przez punkt.

Uwaga. W czasie $[t_1, t_2]$ punkt ten został przesunięty o wektor $\vec{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt$.

○ **Ćwiczenie 9.2.2**

a) Skoczek w dal do momentu odbicia od deski porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Obliczyć długość rozbiegu, jeżeli sportowiec biegł przez $t = 5$ s;

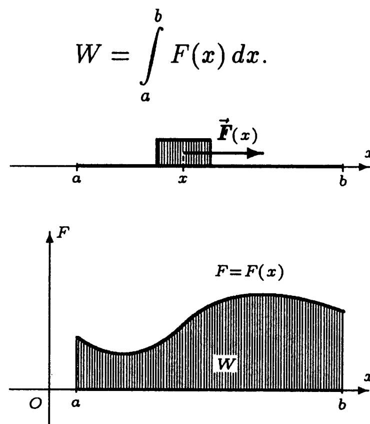
b) Z wieży o wysokości $H = 20$ m rzucono poziomo kamień nadając mu szybkość $v_0 = 8$ m/s. Obliczyć drogę, jaką przebył kamień w powietrzu (przyjąć $g = 10\,\mathrm{m/sek^2}$);

c) Zenek chce złapać Andrzeja, który w chwili $t = 0$ znajduje się w odległości $d = 100$ m od niego. Z powodu osłabienia obaj biegną coraz wolniej. Szybkość Zenka w chwili $t \geqslant 0$ wynosi $v_Z(t) = 8e^{-0{,}01t}$ [m/sek], a szybkość Andrzeja $v_A(t) = 10e^{-0{,}02t}$ [m/sek]. Po jakim czasie Zenek dogoni Andrzeja?

● **Fakt 9.2.3** *(praca wykonana przez zmienną siłę)*

Załóżmy, że równolegle do osi Ox działa zmienna siła $F(x) = |\vec{F}(x)|$. Praca wykonana przez tę siłę od punktu $x = a$ do punktu $x = b$ wyraża się wzorem:

$$W = \int\limits_a^b F(x)\, dx.$$



Rys. 9.2.2. Praca wykonana przez siłę.

○ **Ćwiczenie 9.2.4**

a) Obliczyć pracę jaką wykonamy podnosząc ciało o masie $m = 400$ kg na wysokość $h = 140$ km nad powierzchnię Ziemi. Promień Ziemi wynosi $R = 6400$ km, opór powietrza zaniedbać;

b) Drewniany sześcienny klocek o krawędzi $a = 10$ cm i gęstości $\gamma_1 = 0,5\,\mathrm{g/cm^3}$ pływa w wodzie o gęstości $\gamma_2 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby klocek całkowicie zanurzyć w wodzie.

9.3 Odpowiedzi i wskazówki

9.1.2 a) $\frac{44}{15}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $2 + \sqrt{3}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{9\pi}{2}$; f) $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

9.1.5 a) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **b)** $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$; **c*)** $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}$; **d)** $\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

9.1.7 a) $\frac{1}{3}PH$; **b)** $\frac{2\pi}{3}R^3$.

9.1.9 a) $\frac{\pi}{8}(2+\pi)$; **b)** $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{9}{e^8}\right)$; **c)** π^2; **d)** $\pi\ln 2$.

9.1.10 a) $\frac{4}{3}\pi R^3$; **b)** $\frac{\pi H}{3}\left(r^2+rR+R^2\right)$; **c)** $\frac{\pi a^2 b}{2}$.

9.1.12 a) $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$; **b*)** $\pi\left(\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{e^4+1}-1\right)\right]-\frac{\sqrt{e^4+1}}{e^4}+\sqrt{2}-2\right)$;
c) $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **d)** $8\pi\sqrt{5}$.

9.2.2 a) 25 [m]; **b)** $\frac{16}{5}\ln\frac{5+\sqrt{29}}{2}+4\sqrt{29}$ [m] ≈ 26.81 [m]; **c)** $100\ln\frac{5}{4-\sqrt{6}}$ [s] ≈ 117 [s].

9.2.4 a) $\frac{GMmh}{R(R+h)}$; **b)** 375 [J].

Dodatek

Tożsamości wykorzystywane w analizie

1. Tożsamości z wartością bezwzględną.
Dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$ prawdziwe są równości:

- $|-x| = |x|$,
- $|xy| = |x||y|$,
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$,
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. Kwadraty, sześciany i n-te potęgi sumy.
Dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}$ prawdziwe są równości:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ogólnie dla $n \in \boldsymbol{N}$ prawdziwy jest wzór dwumianowy Newtona:

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Wzory na sumy i różnice potęg.
Dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}$ prawdziwe są wzory:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$.

Ogólnie dla $n \geqslant 2$ mamy:

- $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$,
- $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$, gdzie n jest liczbą nieparzystą.

4. Suma, suma kwadratów i suma sześcianów n początkowych liczb naturalnych.

- $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

- $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. Sumy sinusów i cosinusów kolejnych wielokrotności kątów.

- $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, gdzie $x \neq 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$,
- $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, gdzie $x \neq 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

Nierówności wykorzystywane w analizie

1. Nierówności z wartością bezwzględną.

- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \boldsymbol{R}$,
- $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, gdzie $x_i \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,
- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$, gdzie $a \geqslant 0$,
- $|x| > b \iff x > b$ lub $x < -b$, gdzie $b \geqslant 0$.

2. Nierówności z funkcjami trygonometrycznymi.

- $\sin x < x$ dla $x > 0$,
- $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$,
- $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$,
- $\operatorname{tg} x > x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3. Nierówności z funkcjami wykładniczą i logarytmiczną.

- $e^x \geqslant 1 + x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$,
- $\ln(1 + x) \leqslant x$ dla $x > -1$.

4. Nierówności z silnią.
Niech $k > 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wtedy dla dostatecznie dużych $n \in \boldsymbol{N}$ prawdziwe są nierówności:

- $n! \geqslant k^n$,
- $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

5. Nierówność Bernoulliego

- $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ oraz dla każdego $x \geqslant -1$.

5. Nierówność z funkcją część całkowita
Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są nierówności

- $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$,
- $x - 1 < E(x) \leqslant x$.

Symbole sumy i iloczynu

Symbol sumy.

Niech k i l będą liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $k \leqslant l$. Symbolem

$$\sum_{n=k}^{l} a_n$$

oznaczamy sumę

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l.$$

Zatem

$$\sum_{n=k}^{l} a_n \stackrel{def}{=} a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l.$$

Symbol iloczynu.

Niech k i l będą liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $k \leqslant l$. Symbolem

$$\prod_{n=k}^{l} a_n$$

oznaczamy iloczyn

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_l.$$

Zatem

$$\prod_{n=k}^{l} a_n \stackrel{def}{=} a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_l.$$

Przykład

a) $\displaystyle\sum_{n=11}^{20} n = 11 + 12 + 13 + \ldots + 20;$

b) $\displaystyle\prod_{n=3}^{10} \sqrt[n]{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[10]{2};$

c) $\displaystyle\sum_{n=21}^{100} 3 = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{\text{osiemdziesiąt trójek}};$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{1} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{\pi}{1000};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\sum_{i=1}^{n} i^n = 1 + (1^2 + 2^2) + (1^3 + 2^3 + 3^3) + \ldots + (1^{10} + 2^{10} + \ldots + 10^{10});$

f) $\prod_{n=1}^{10}\prod_{i=n}^{n+1} n^i = (1^1\cdot 1^2)\cdot(2^2\cdot 2^3)\cdot(3^3\cdot 3^4)\cdot\ldots\cdot(10^{10}\cdot 10^{11})$;

g) $\sum_{n=1}^{50}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50}$;

h) $\prod_{n=1}^{7}\sum_{i=n}^{2n} 2^i = (2^1+2^2)\cdot(2^2+2^3+2^4)\cdot\ldots\cdot(2^7+2^8+2^9+\ldots+2^{14})$.

Literatura

1. A.Borzymowski, *Analiza matematyczna*, T. I, Wydawnictwo Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 1998.
2. G.Decewicz, W.Żakowski, *Matematyka*, cz. I, WNT, Warszawa 1991.
3. G.M.Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. I, II, PWN, Warszawa 1995.
4. A.M.Kaczyński, *Podstawy analizy matematycznej*, T. 1. *Rachunek różniczkowy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
5. A.M.Kaczyński, *Podstawy analizy matematycznej*, T. 2. *Rachunek całkowy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
6. K.Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1970.
7. G.Kwiecińska, *Analiza matematyczna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1995.
8. R.Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studentów*, cz. 1, 2, WNT, Warszawa 1995.
9. F.Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1977.
10. K.Litewska, J.Muszyński, *Matematyka*, T. I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
11. M.Mączyński, J.Muszyński, T.Traczyk, W.Żakowski, *Matematyka – podręcznik podstawowy dla WST*, T. I, II, PWN, Warszawa 1979, 1981.
12. H. i J.Musielakowie, *Analiza matematyczna*, T. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1993.
13. J.Muszyński, *Analiza matematyczna*, cz. I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1997.
14. M.Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, Berkeley, 1994.
15. W.Sosulski, *Analiza matematyczna*, T. I, Wydawnictwo Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2000.
16. A.Wilkoński, *Matematyka wyższa*, cz. 1, 2, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1969.

Skorowidz

Księgarnie prowadzące sprzedaż książek naszego wydawnictwa

Księgarnia DOM KSIĄŻKI
Politechnika Białostocka
15-351 **Białystok**, ul. Wiejska 45C

Księgarnia Akademii Bydgoskiej
85-064 **Bydgoszcz**, ul. Chodkiewicza 30

Księgarnia ELEKTRA
Politechnika Częstochowska
42-200 **Częstochowa**, ul. Dekabrystów 26/30

Księgarnia KOLIBER
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
42-200 **Częstochowa**, ul. Waszyngtona 4/8

Księgarnia Wydawnictwa PG
Politechnika Gdańska
80-952 **Gdańsk**, ul. Narutowicza 11/12

Księgarnia KALLIMACH
Biblioteka Główna Uniwersytetu Gdańskiego
81-824 **Sopot**, ul. Armii Krajowej 119/121

Księgarnia LITERKA
Uniwersytet Gdański
80-952 **Gdańsk-Oliwa**, ul. Wita Stwosza 55

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Gliwice**, ul. Akademicka 2, 7, 16

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Katowice**, ul. Krasińskiego 8

Księgarnia OR PAN
Uniwersytet Śląski
40-007 **Katowice**, ul. Bankowa 11

Księgarnia STACHURSKI
Politechnika Świętokrzyska
25-314 **Kielce**, al. 1000-lecia P.P. 7b

Księgarnia Akademicka ŚWIATOWID
25-315 **Kielce**, ul. Starodomaszowska 30

Księgarnia Naukowa
Politechnika Koszalińska
75-620 **Koszalin**, ul. Racławicka 15-17

Sprzedaż Uczelnianych Wydawnictw
Akademia Górniczo-Hutnicza
30-059 **Kraków**, al. Mickiewicza 30

Księgarnia
Politechnika Krakowska
31-155 **Kraków**, ul. Warszawska 24

Księgarnia ACADEMICUS
Akademia Pedagogiczna
30-084 **Kraków**, ul. Podchorążych 2

Główna Księgarnia Naukowa
31-118 **Kraków**, ul. Podwale 6

Księgarnia Naukowo-Techniczna
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 36

Księgarnia SINUS
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 40

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
20-031 **Lublin**, pl. Curie-Skłodowskiej 5

Księgarnia MERITUM
Politechnika Łódzka
90-924 **Łódź**, ul. Żwirki 36

Księgarnia PRUSZYŃSKI BEZ SPÓŁKI
Uniwersytet Łódzki
90-938 **Łódź**, ul. Matejki 34/38

Księgarnia ŻAK
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
10-718 **Olsztyn**, ul. Oczapowskiego 6

Księgarnia TECHNICZNA
Politechnika Opolska
45-271 **Opole**, ul. Sosnkowskiego 31

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Opolski
45-058 **Opole**, ul. Kośnego 45

Księgarnia Akademicka
Filia Politechniki Warszawskiej
00-271 **Płock**, pl. Łukasiewicza 17

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Adama Mickiewicza
60-813 **Poznań**, ul. Zwierzyniecka 7

Księgarnia Naukowa KAPITAŁKA
61-725 **Poznań**, ul. Mielżyńskiego 27/29

Księgarnia Techniczna DOM KSIĄŻKI
61-888 **Poznań**, ul. Półwiejska 14

Sklep papierniczy
Politechnika Poznańska
61-141 **Poznań**, ul. Kórnicka 30
(osiedle akademickie Piotrowo)

Księgarnia Akademii Ekonomicznej
61-895 **Poznań**, ul. Powstańców Wielkopolskich 16

Księgarnia EKONOMIK
Politechnika Radomska
26-600 **Radom**, ul. Chrobrego 31 i 42

Księgarnia UNKA
Politechnika Rzeszowska
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Księgarnia Akademicka LIBRA
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
35-310 **Rzeszów**, ul. Rejtana 16c

Kiosk-Księgarnia
Politechnika Szczecińska
70-311 **Szczecin**, al. Piastów 48

Uniwersytecka Księgarnia Naukowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
87-100 **Toruń**, ul. Reja 25

Księgarnia Naukowa OR PAN
Pałac Kultury i Nauki
00-901 **Warszawa**

Księgarnia Naukowa OR PAN – BIS
00-818 **Warszawa**, pl. Twarda 51/55

Księgarnia Studencka
Politechnika Warszawska
00-661 **Warszawa**, pl. Politechniki 1

Księgarnia Studencka
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
02-787 **Warszawa**, ul. Nowoursynowska 161

Księgarnia
Szkoła Główna Handlowa
02-554 **Warszawa**, al. Niepodległości 162

Księgarnia POLITECHNIKA
Politechnika Wrocławska (bud. A-1)
50-370 **Wrocław**, wyb. Wyspiańskiego 27

Księgarnia TECH
Politechnika Wrocławska (bud. D-1)
50-377 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 13

Księgarnia-Ksero ADUŚ
Instytut Matematyczny UWr.
50-314 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4

Kiosk-Księgarnia
Akademia Rolnicza
50-357 **Wrocław**, ul. Grunwaldzka 53

Księgarnia ZETKA
Akademia Ekonomiczna
53-345 **Wrocław**, ul. Komandorska 118/120

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Zabrze**, ul. Roosevelta 26

Księgarnia WSP
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
65-625 **Zielona Góra**, al. Wojska Polskiego 69



Internetowa Księgarnia Akademicka
www.ika.edu.pl

Księgarnia Internetowa MERLIN
www.merlin.com.pl

Księgarnia Internetowa UNIVERSITAS
www.universitas.com.pl

Księgarnia Internetowa KAPITAŁKA
www.kapitalka.com.pl


GiS